



Un algorithme parallele PR2 du multinapsack

G. Plateau, C. Roucairol, I. Valabregue

► To cite this version:

G. Plateau, C. Roucairol, I. Valabregue. Un algorithme parallele PR2 du multinapsack. RR-0811, INRIA. 1988. inria-00075740

HAL Id: inria-00075740

<https://hal.inria.fr/inria-00075740>

Submitted on 24 May 2006

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.



UNITÉ DE RECHERCHE
IRIA-ROCQUENCOURT

Institut National
de Recherche
en Informatique
et en Automatique

Domaine de Voluceau
Rocquencourt
BP 105
78153 Le Chesnay Cedex
France

Tél.: (1) 39 63 55 11

Rapports de Recherche

N°811

UN ALGORITHME PARALLELE PR^2 DU MULTIKNAPSACK

Gérard PLATEAU
Catherine ROUCAIROL
Isabelle VALABREGUE

MARS 1988



★ R R 8 1 1 ★

ALGORITHM PR² FOR THE PARALLEL SIZE REDUCTION OF THE 0.1 MULTIKNAPSACK PROBLEM

UN ALGORITHME PARALLELE PR² DU MULTIKNAPSACK

Gérard PLATEAU^{*}, Catherine ROUCAIROL^{**}, Isabelle VALABREGUE^{***}

Abstract

This work exploits the characteristics of parallel machines (vectorization, multiprocessing) in order to perform a lot of tests for the size reduction of the 0.1 multiknapsack problem (fixation of variables, estimation of constraints). In the first section of this report, we describe our algorithm for this crucial solving phase, and give first numerical results obtained on a supercomputer CRAY 2. These results are compared with those obtained by previous sequential algorithms, and prove the efficiency of our approach. All details concerning the implementation of the algorithm on the CRAY 2, as well as the information about this supercomputer, the parallel program PR² (code in FORTRAN 77, multitasking library cray), and the test problems from literature, are reported in section 2.

Key words : combinatorial optimization, pseudo boolean optimization, reduction, surrogate relaxation, parallel algorithms, asynchronous multiprocessors machine.

Résumé

Le but de ce travail est d'exploiter les possibilités offertes par les machines parallèles (vectorisation, multitâches) de façon à augmenter le nombre de tests effectués lors de la procédure tendant à réduire la taille d'un problème de multiknapsack en variables 0.1 (par fixation de variables, élimination de contraintes). L'algorithme distribué mis au point est décrit dans la première partie. Les premiers résultats obtenus en l'implantant sur un super ordinateur - le Cray 2 - sont comparés à ceux des approches séquentielles, et justifient amplement la démarche proposée. En seconde partie, sont reportés tous les détails concernant son implémentation sur le Cray 2 (description de la machine, de l'algorithme parallèle PR² codé en FORTRAN 77 et en utilisant la librairie multitâches CRAY, problèmes tests).

Mots clés : optimisation combinatoire, optimisation pseudo-booléenne, relaxation "surrogate", algorithme parallèle, machine multiprocesseurs asynchrone.

Acknowledgement

This research was supported with computer time by CCVR (Centre de Calcul Vectoriel pour la Recherche, Ecole Polytechnique, Palaiseau, France) inside the CAPRAN Research Project (INRIA, Rocquencourt, France).

* Universit  Paris-Nord, LIPN

** INRIA, Projet Capran

*** Ingénieur IIE, stagiaire INRIA 87



SECTION 1

A DISTRIBUTED ALGORITHM FOR THE SIZE REDUCTION OF THE 0.1 MULTIKNAPSACK PROBLEM

Contents :

Introduction	3
1. Reduction	5
2. High-level description of the algorithm	8
3. Distributed algorithm	13
4. Experimental results	16
Conclusion	21

INTRODUCTION

Although NP-Hard, the 0-1 knapsack problem is well solved in a sequential way for many classes of instances. The lot of exact algorithms in literature includes implicit enumeration procedures with an experimental linear time complexity (see for example [1,2,13,14,17]). Sizes up to several thousand variables are easily reached for some instances whose data are randomly generated from a uniform distribution.

On the opposite, optimal solutions of the 0-1 multidimensional knapsack problem are classically reached for instances with strongly limited sizes : about ten constraints and one hundred variables [3,4,5,6,15,16,21,22,24].

Up to now, parallel algorithms devoted to the knapsack problem have only been designed for the one dimension case [8,10,11,25]. In addition, all these works are based upon the use of theoretical models of parallel computation (PRAM with a polynomial - even exponential in the input size - number of processors).

The aim of our work is to elaborate an efficient parallel algorithm for solving the 0-1 multiknapsack problem and to implement it on an actual supercomputer whose number of processors is obviously independent of the input sizes.

The solving of the 0-1 multiknapsack problems includes two main phases :

- the reduction of the size ;
 computations of lower bounds (heuristic methods) and upper bounds (Lagrangian and surrogate relaxations) allow to fix variables at their optimal values and to drop redundant constraints
- the implicit enumeration of the reduced problem.

Parallel branch and bound algorithms have been already designed for various combinatorial optimization problems [12,19,20] ; due to the crucial impact of the first phase, we choose to focus our study on this preprocessing reduction algorithm.

The basic idea of this paper is to exploit the speed of supercomputers in order to perform much more works than in a sequential way and thus to improve the size reduction (that is to increase the number of fixed variables and eliminated constraints).

After the description of the reduction tools (section 1), we give in section 2 the main characteristics of our parallel algorithm - denoted by PR² (Plateau Roucairol Parallel Reduction). This algorithm is based upon the use of a bounded number of processes which behave concurrently and communicate by exchanging messages. The necessary synchronization and communication operations are specified in section 3.

Algorithm PR² has been implemented on the asynchronous multiprocessor machine CRAY 2. The first computational results are summarized by considering classical test problems in section 4.

1. REDUCTION

1.1. Problem statement

The following 0-1 multiconstraint knapsack problem (B) is considered :

$$\begin{array}{ll} \text{maximize} & cx \\ \text{subject to} & Ax \leq b ; x \in V, \end{array}$$

whose data are such that

$c \in \mathbb{N}_+^n$, $b \in \mathbb{N}_+^m$, A is a $m \times n$ dense non-negative integer matrix, and where $V = \{x \in \mathbb{R}^n \mid x_j = 0 \text{ or } 1, j = 1, 2, \dots, n\}$.

1.2. Notations

$[\lambda]$: integer part of a real number λ .

Given a set J :

$[J]$: convex hull of J ;

$|J|$: cardinality of J ;

$J \setminus U$: complement of a given subset U of J .

Given an optimization problem (P) :

$v(P)$: optimal value of (P) ;

$\bar{v}(P)$ (resp. $\underline{v}(P)$) : upper (resp. lower) bound on $v(P)$;

$(P \mid x \in X)$: (P) with the added constraint $x \in X$.

When (P) is a 0-1 problem :

(\bar{P}) : problem (P) when $[V]$ is substituted for V .

1.3. Reduction tests

The use of a preprocessing reduction algorithm improves the efficiency of exact methods by decreasing the size of the problems (fixation of variables and elimination of constraints) (see [4,5]).

The classical concept of surrogate constraints introduced by Glover [7] allows to generate reduction tools with expected linear time complexities (use for the more sophisticated tests of the solving of knapsack relaxations (see [2,4])).

Before to give the statement of these duality based reduction tests, the simple following ones allow the construction of a so-called *well-stated* problem.

1.3.1. The well-stated problem

This problem is obtained by dropping obviously redundant constraints and fixed variables

- (R₁) if there exists an index $j \in \{1, 2, \dots, n\}$ and an index $i \in \{1, 2, \dots, m\}$ such that :
- $$a_{ij} > b_j$$
- then the variable x_j must be fixed at 0.
- (R₂) if there exists an index $i \in \{1, 2, \dots, m\}$ such that :
- $$\sum_{j=1}^n a_{ij} \leq b_i$$
- then the constraint must be eliminated.
- (R₃) if there exists an index $j \in \{1, 2, \dots, n\}$ such that :
- $$A_j = 0$$
- then the variable x_j must be fixed at 1.

1.3.2. Duality based tests

For a well-stated problem (B) with n variables and m constraints, given a multiplier $w \in \mathbb{R}_+^m$ (generated or not by the solving of the Lagrangean (or surrogate) dual of (B)), let us consider :

- the associated surrogate relaxation (0-1 knapsack problem derived from (B)) :

$$\begin{aligned} (B^0(w)) \quad & \max \quad cx \\ & \text{s.t.} \quad wAx \leq wb ; x \in V \end{aligned}$$

- for each q in $\{1, 2, \dots, m\}$, the following 0-1 knapsack problem

$$\begin{aligned} (B^q(w)) \quad & \max \quad A_q x \\ & \text{s.t.} \quad wAx \leq wb ; x \in V \end{aligned}$$

a) Fixation of variables

With the aim of finding a solution with a value greater than a given lower bound $\underline{v}(B)$ on $v(B)$, the fixation of variables at their optimal values is realized as follows :

Theorem 1 :

If there exists an index $j \in \{1,2,\dots,n\}$ and $\epsilon \in \{0,1\}$ such that

$$v(B^0(w) \mid x_j = \epsilon) \leq \underline{v}(B)$$

then the variable x_j must be fixed at the value $1 - \epsilon$.

Proof : see [4,16].

b) Elimination of constraints

The following result gives a sufficient condition for dropping redundant constraints :

Theorem 2 :

If there exists an index q in $\{1,2,\dots,m\}$ such that

$$v(B^q(w)) \leq b_q$$

then the constraint $A_q x \leq b_q$ can be eliminated.

Proof : see [4,16].

1.3.2 Main features of the serial algorithm

The serial reduction system FPR83 realized by Fréville and Plateau includes three main phases :

(i) computation of an upper bound on the optimal value by using Lagrangean and surrogate relaxations.

(ii) computation of a lower bound by using the so-called AGNES heuristic methods.

(iii) size reduction by the conjunction of tests applied to 0-1 knapsack problems derived from (B) as described in theorems 1 and 2.

This serial algorithm FPR83 is extensively described in [4,5] with the actual chain of reduction tests and additional details about the selected options for its implementation.

It has been tested on a CII HB IRIS 80 with twenty concrete problems [3,15,16,21,24] and thirty randomly generated problems [22]. These computational results prove the quality of performances of heuristics AGNES and the decreasing of the running times for exact methods including this preprocessing reduction system FPR83.

For example, for the seven problems due to Petersen [15], table 1 details for each of them their original and reduced sizes, and the running times (in second) for their exact solving by Shih's code [22] respectively without (original size) and with (reduced size) the inclusion of FPR83.

original size	time (second)	reduced size	time	
			reduction	global
10 × 6	.2	0 × 0	1.2	1.2
10 × 10	.5	1 × 3	2.3	2.3
10 × 15	1.9	5 × 8	4.8	4.8
10 × 20	1.8	2 × 8	5.7	5.8
10 × 28	9.2	2 × 9	5.4	5.5
5 × 39	> 25	4 × 28	7.5	25
5 × 50	> 25	4 × 38	7.7	28.8

table 1

2. HIGH-LEVEL DESCRIPTION OF THE ALGORITHM

Instead of constructing the optimal dual multiplier w^* of (B), the aim of our parallel algorithm is to generate two sets W_1 and W_2 of dual multipliers which allow to produce a set of 0-1 knapsack problems :

. *fixation of variables* :

$$(B^0(w)) \max cx \quad \text{s.t.} \quad wAx \leq wb ; x \in V, w \in W_1.$$

. *elimination of constraints* : $q \in \{1, \dots, m\}$

$$(B^q(w)) \max A_q x \quad \text{s.t.} \quad wAx \leq wb ; x \in V, w \in W_2.$$

This idea is motivated by the two following observations.

First, it is not proved that the use of the unique 0-1 knapsack problem ($B^0(w^*)$) leads to the best results as concerns the number of fixed variables and eliminated constraints. In addition, the relation

$$\bar{v}(B^0(w)) \leq \bar{v}(B^0(w')) \quad w, w' \in \mathbb{R}^m_+$$

does not imply necessarily for any variable x_j and $\epsilon \in \{0,1\}$

$$\bar{v}(B^0(w) \mid x_j = \epsilon) \leq \bar{v}(B^0(w') \mid x_j = \epsilon).$$

Second, from a computational time point of view, it is not realistic to consider serially a set of the *tool knapsacks* ($B^0(w)$), $w \in W_1$. However, this kind of approach had been used by Hansen and Plateau [16] in order to test experimentally its robustness.

Obviously, due to parallelism, it is possible to work concurrently with several *tool knapsacks* and to apply a sequence of reduction tests for each of them.

The distributed work is the following :

- *fixation of variables* :

given a multiplier $w \in W_1$, perform the usual sequence of tests on ($B^0(w)$).

- *elimination of constraints* :

given a constraint $q \in \{1,2,\dots,m\}$ candidate for elimination, use of another sequence of tool knapsacks ($B^q(w)$), $w \in W_2$.

In fact, the 0-1 knapsack problems ($B^0(w) \mid x_j = \epsilon$) and ($B^q(w)$) are not exactly solved, but *with respect to theorems 1 and 2* these different kinds of relaxations are used :

- . Lagrangean relaxations
- . the associated linear programs.

Namely, for the fixation of variables, the following results are applied :

given a tool knapsack ($B^0(w)$), $w \in W_1$, let us define its Lagrangean relaxation associated with a multiplier $\lambda \in \mathbb{R}^+$:

Theorem 3 :

- (i) the function $\lambda \rightarrow v(LR(\lambda))$ is a convex piece-wise linear function.
- (ii) the breakpoints of this function are $\lambda_j = c_j / wA^j$, $j = 1, 2, \dots, n$.

Due to theorems 1 and 3, this result is deduced :

Corollary :

For the fixation of any variable of (B), it is sufficient to consider the finite set of Lagrangean relaxations $(LR(\lambda))$ $\lambda \in \Lambda = \{0, \lambda_1, \dots, \lambda_n, +\infty\}$.

Proofs : see [9].

One more time, instead of constructing the optimal Lagrangean dual multiplier λ^* of $(B^0(w))$, we generate the set Λ of multipliers ; this leads to an obvious vectorizable reduction structure.

Let us recall that for each λ in Λ , by denoting :

$$J^+(\lambda) = \{j \in \{1, \dots, n\} \mid c_j - \lambda wA^j > 0\} ; J^-(\lambda) = \{j \in \{1, \dots, n\} \mid c_j - \lambda wA^j < 0\}$$

then

$$v(LR(\lambda)) = \lambda wb + \sum_{j \in J^+(\lambda)} (c_j - \lambda wA^j)$$

and for j in $J^+(\lambda)$:

$$v(LR(\lambda) \mid x_j=1) = v(LR(\lambda)) ; v(LR(\lambda) \mid x_j=0) = v(LR(\lambda)) - (c_j - \lambda wA^j)$$

and for j in $J^-(\lambda)$:

$$v(LR(\lambda) \mid x_j=0) = v(LR(\lambda)) ; v(LR(\lambda) \mid x_j=1) = v(LR(\lambda)) + (c_j - \lambda wA^j)$$

Thus, for each variable x_j , $j \in J^+(\lambda) \cup J^-(\lambda)$, it is sufficient to exploit the comparison of these two vectors :

$$(|c_j - \lambda wA^j|)_{\lambda \in \Lambda} \quad \text{and} \quad (v(LR(\lambda)) - v(B))_{\lambda \in \Lambda}.$$

Finally, as concerns the elimination of constraints, in this previous work, we choose to solve the linear programs associated with $(B^q(w))$, $w \in W_2$ by applying the expected linear time complexity algorithm described in [2].

3. ALGORITHM PR2

Our algorithm is based upon the use of a bounded number of processes which are to be dealt with concurrently : they execute different instructions over different data at any time and communicate by exchanging messages through a fixed interconnection network.

Among these N processes, one specialized process, the controller process called S , distributes and schedules the work between the other processes (current process or task- k , $k=1,...,N-1$).

This allows us to implement this algorithm more easily on a shared memory asynchronous multiprocessors machine.

Each current process performs successively two phases : fixation of variables (phase 1) and constraint elimination (phase 2).

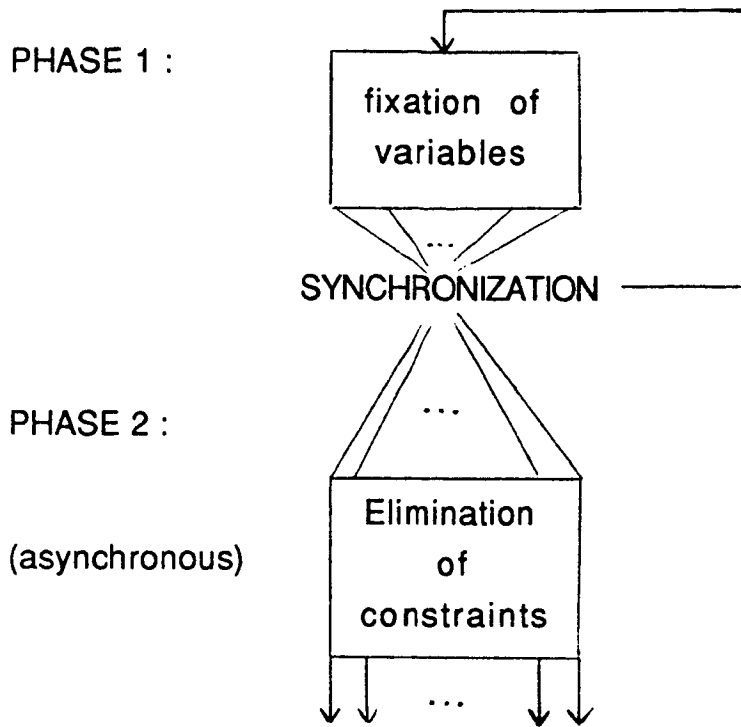
During phase 1, current processes proceed in parallel to the fixation of variables : each of them works with a particular tool knapsack generated by a multiplier w . All the results produced by these processes are then gathered. The cardinality of the set CP of cooperating processes depends on the number of multipliers $|W_1|$ than can be generated :

$$|CP| = \min (N-1, |W_1|).$$

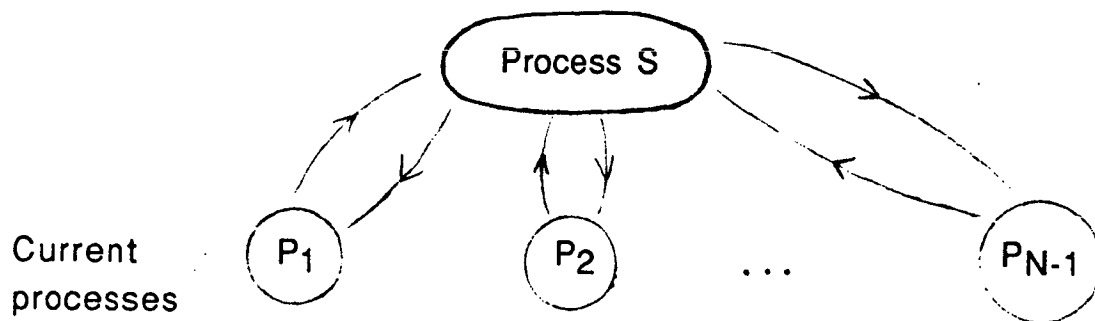
This iteration will be performed until all the multipliers have been assigned to processes.

All processes then enter in phase 2, but only if the fixation of variables is no longer efficient : that is to say if at least one of the variables have been fixed at the current iteration of phase 1, $|CP|$ processes will reenter in a new iteration with an initial set W_1 of multipliers.

During phase 2, on the contrary, processes are not synchronized : each process works with a candidate constraint q for elimination ($A_q x \leq b_q$) associated with a tool constraint ($wAx \leq wb$, $w \in W_2$) received from the controller process S . Then it sends back its results to process S which returns new work if remains any.



The graph of communications between processes during the algorithm is :



The structure of messages is (x,y,z) with

x : type of message,

y : value of results,

z : number of process which communicates with S.

Process k

```
read messages;
upon receiving message ('work1',w,k)
    /phase 1/
    use the Lagrangean relaxations of
        max  $cx$  s.t.  $wAx \leq wb$  ,  $x \in V$  ;
    update  $X_0, X_1$  ;
    if (all variables are fixed) or (incompatibility detected)
    then send message ('stop',(X0,X1),k) ;
        halt Process k
    else send message ('work1', $\emptyset$ ,k)
    endif
upon receiving message ('nowork', $\emptyset$ ,k)
    send message ('results',(X0,X1),k)
upon receiving message ('stop', $\emptyset$ ,k)
    halt Process k ;
upon receiving message ('work2',(q,w),k)
    /phase 2/
    solve the linear program associated with
        max  $A_q x$  s.t.  $wAx \leq wb$  ,  $x \in V$  ;
    if (constraint q is eliminated)
    then send message ('new candidate constraint',q,k)
    else send message ('new tool constraint',q,k)
    endif;
exec Process k ;
```

Process S

```
/phase 1/  
/W1 = set of multipliers W/  
reduction ← true ;  
generate a well-stated problem (tests R1, R2, R3) ;  
while reduction do  
    reduction ← false ;  
    W ← W1 ;  
    CP = set of cooperating processes with |CP| = min(|W1|, N-1),  
    for each process k in CP do  
        choose w in W ; W ← W \ w ;  
        send message ('work1', w, k) ;  
    endfor ;  
    while CP ≠ ∅ do  
        read messages ;  
        upon receiving message ('work1', ∅, k) :  
            if W ≠ ∅ then choose w in W ; W ← W \ w ;  
                send message ('work1', w, k) ;  
            else send message ('nowork', ∅, k)  
        endif ;  
        upon receiving message ('results', (X0, X1), k)  
            CP ← CP \ k ;  
            update X0, X1 ;  
            if all variables are fixed or incompatibility detected then  
                for each process k in CP do  
                    send message ('stop', ∅, k)  
                endfor ;  
                halt process S ;  
            endif ;  
            upon receiving message ('stop', (X0, X1), k)  
                CP ← CP \ k ;  
                update X0, X1 ;  
                for each process k in CP do  
                    send message ('stop', ∅, k)  
                endfor ;  
                halt process S ;  
    endwhile ;
```



```

    if at least one variable is fixed
    then    generate a well-stated problem ;
            reduction ← true

    endif ;
endwhile ;
/phase 2/
M = set of constraints ;
/W2 = set of multipliers/
/initialization/
for q=1 to m do W(q) ← W2 endfor ;
for k=1 to N-1 do
    send message ('work2',(q,w),k) with (q,w) ∈ M × W(q) ;
    update W(q) ; status(k) ← 1 /status(k)=1 if Process k is working, 0 otherwise/
endfor ;

while M ≠ ∅ or  $\sum_{k=1}^{N-1} \text{status}(k) \neq 0$  do
    read messages ;
    upon receiving message ('new candidate constraint',q,k)
        update the results / constraint q is eliminated / ;
        if q ∈ M then M ← M \ q endif ;
        if M ≠ ∅ then
            choose q in M with W(q) ≠ ∅ ;
            choose a multiplier w in W(q) ; W(q) ← W(q)\w ;
            send message ('work2',(q,w),k)
        else
            send message ('stop',∅,k) ; status(k) ← 0 ;
            if  $(\sum_{k=1}^{N-1} \text{status}(k) = 0)$  then halt Process S endif
        endif
    NEW
    CANDIDATE
    upon receiving message ('new tool constraint',q,k)
        if W(q)≠∅ then    choose w in W(q) ; W(q) ← W(q)\w ;
                        send message ('work2',(q,w),k) ;
        else    update the results /constraint q is not eliminated/ ;
                NEW CANDIDATE
        endif
endwhile ;

```

The algorithm will terminate (Process S halts) when all Processes k , $k \in \{1, \dots, N-1\}$ halt and when all the constraints $q \in \{1, \dots, m\}$ have been studied.

4 . EXPERIMENTAL RESULTS

4.1. Implementation

Algorithm PR² [18] has been implemented on the asynchronous multiprocessor CRAY2. Its four vector processors communicate by simultaneous reading or exclusive writing on a shared central memory (32 M words, CPU cycle time 4 ns for vector operations).

The adaptation of our distributed algorithm is straightforward : write and read operations on the memory substitute for send and received messages to (from) the process S.

The code has been written in Fortran 77 by I. Valabrègue [23] and the multitasking library of CRAY has been used for synchronization and communication operations.

The fixation of variables realized by comparing vectors (extensive use of Lagrangean relaxations of 0-1 knapsack problems) has been designed in order to take advantage of automatic vectorization (it concerns the do-statements which do not include any if or goto-statement).

4.2. Test problems

We carry out the test with fifty problems from literature reported in table 2, in order to realize comparisons with the sequential algorithms.

Author	Number of problems	Size	
		from	to
Shih [22]	30	5 × 30	5 × 90
Ness, Weingartner [24]	8	2 × 28	2 × 105
Petersen [15]	7	10 × 10	10 × 28
		5 × 39	5 × 52
Senju, Toyoda [21]	2	30 × 60	30 × 90
Hansen, Plateau [16]	2	4 × 28	4 × 35
Fleisher [3]	1	10 × 20	10 × 20

table 2

4.3. Numerical results

First results over 32 problems have been obtained on an emulator of CRAY - called CREM - running on a MULTICS machine BULL DPS 68.

For these computational experiments, we choose to work with tool knapsacks associated with the trivial multipliers : unit vectors of \mathbb{R}^m . Namely, each $B^0(w)$ or $B^q(w)$ are of these types :

$$\begin{aligned} \max \quad & cx \quad \text{s.t. } A_p x \leq b_p ; x \in V \\ \max \quad & A_q x \quad \text{s.t. } A_p x \leq b_p ; x \in V \end{aligned} \quad \text{with } p \in \{1, \dots, m\}.$$

Table 3 contains comparisons of the number of variables fixed during phase 1 by our algorithm PR^2 and a version which only uses the optimal Lagrangean multiplier for each tool knapsack (as in the sequential algorithm of Hansen and Plateau). A strict improvement can be observed for 15 problems (the greatest decrease is 6).

The two next columns include the reduced sizes respectively obtained for phases 1 and 2 by algorithm FRP83 and ours.

Problem	Initial size	Number of remaining variables (phase 1)		reduced size (phases 1 and 2)		time ms CRAY 2
		optimal multiplier	PR ²	FPR83	PR ²	
Shih	5 × 70	27	27	3 × 13	3 × 27	105
	-	19	18	1 × 2	3 × 18	117
	-	23	19	3 × 9	5 × 19	115
	-	18	7	1 × 7	1 × 7	116
	5 × 80	22	20	3 × 29	3 × 20	141
	-	20	20	2 × 13	3 × 20	141
	-	13	13	3 × 20	3 × 13	135
	-	20	18	3 × 10	4 × 18	139
	5 × 90	24	22	3 × 30	3 × 22	168
	-	12	12	2 × 7	3 × 12	177
	-	14	14	2 × 8	3 × 14	174
	-	13	13	2 × 9	2 × 13	173
	-	5	0	0 × 0	0 × 0	31
	<hr/>					
Ness	2 × 28	10	4	1 × 4	1 × 4	31
Weingartner	-	11	11	1 × 5	2 × 11	28
	-	21	21	2 × 19	2 × 21	25
	-	5	5	1 × 5	1 × 5	31
	-	0	0	0 × 0	0 × 0	31
	-	8	6	2 × 7	2 × 6	29
	2 × 105	62	61	2 × 12	2 × 61	106
	-	105	102	2 × 29	2 × 102	70
<hr/>						
Petersen	10 × 6	0	0	0 × 0	0 × 0	18
	10 × 10	8	3	1 × 3	1 × 3	24
	10 × 15	8	8	5 × 8	2 × 8	38
	10 × 20	10	10	2 × 8	1 × 10	43
	10 × 28	13	10	2 × 9	1 × 10	55
	5 × 39	38	38	4 × 28	5 × 38	45
	5 × 50	47	46	4 × 38	5 × 46	68
<hr/>						
Senju	30 × 60	53	53	30 × 40	30 × 53	574
Toyoda	30 × 90	51	51	30 × 37	30 × 51	556
<hr/>						
Hansen	4 × 28	28	28	4 × 27	4 × 28	23
Plateau	4 × 35	35	34	4 × 34	4 × 34	33

Table 3

Given a tool knapsack, we have to point out that the sequential algorithm FPR83 makes use of more elaborated tests for the variable fixation (solving of linear programs with sometimes additional alternative fixation of optimal basic variable - first level of a branch and bound tree) as well as for constraint elimination (solving of linear programs at first or two levels of a b.b. tree).

Furthermore, we recall that Fréville and Plateau use near optimal dual multipliers of (B) in order to construct "good" tool knapsack problems.

Nevertheless, our method is at least as good for 15 problems (with a strict improvement for seven of them).

The last column details CPU times in milliseconds for our algorithm (with 4 processes) implemented on the CRAY2 working with only one processor. This allows to show that even the simulation of parallelism leads to very small computational times : from .180 second (for Petersen's problem 1, 10×6 reduced to 0×0) to .574 second (for Senju and Toyoda's problem 1, 30×60 reduced to 30×53).

Besides these times include the data reading (about 30 per cent of global time !) and may differ from one execution to another due to non determinism.

Additional experiments have been performed on CRAY2 in order to measure the impact of using more than one processor. In table 4, for the two problems of Senju and Toyoda, we report the values of the following parameters :

T_j : the time with j processors (computed from CRAY2 informations, i.e. CPU times t_i with exactly i working processors,

$$T_j = \sum_{i=1}^j t_i).$$

S_j : the experimental speed-up with j processors measured by the ratio : T_1 / T_j .

Size	j	Tj ms	Sj
30 × 60	1	462	1
	2	307	1.50
	3	277	1.67
	4	332	1.39
30 × 90	1	441	1
	2	332	1.33
	3	356	1.24
	4	558	.79

Table 4 - Senju and Toyoda's problems.

As the initialization, management and interaction of tasks are accomplished by code that is not in the original program, this additional execution time limits the granularity of parallelism that can be profitably exploited. The costs of multitasking and the size of tasks that can benefit from parallel executions must therefore be appreciated.

These examples illustrate the fact that for small sizes of instances the overhead penalty - amount of time spent for activating and creating parallel tasks added to access to shared central memory ... - has not to be neglected. It can also outweigh the amount of actual reduction work on each processor. In this case, it proves that balanced tasks must have greater sizes.

It is clear that the use of four processors will be much more attractive for instances with a number of variables greater than those of literature.

CONCLUSION

The results of our first experiments indicate that :

- more elaborated reduction tests must be implemented in order to increase the numbers of fixed variables and eliminated constraints. In addition, this greatest amount of work by process will lead to a better exploitation of the supercomputer,
- a lot of good dual multipliers must be generated in order to construct good surrogate constraints for the tool knapsack problems.

Finally, this fast improved implementation of our parallel reduction algorithm PR² will be very attractive and must take place in any parallel procedure for the exact solving of great size instances of the multiknapsack problem. This will be the future direction of our work.

SECTION 2

**UN ALGORITHME PARALLELE PR² POUR LA REDUCTION
DU MULTIKNAPSACK :
IMPLEMENTATION SUR UNE MACHINE QUADRI-PROCESSEURS
ASYNCHRONE A MEMOIRE PARTAGEE - LE CRAY 2 -**

Sommaire :

1 - Présentation du Cray 2	24
2 - Algorithme parallèle de réduction du multiknapsack	30
3 - Listing du programme PR ²	57
4 - Problèmes tests	83

1. PRESENTATION DU CRAY 2

Le CRAY 2 est composé de 4 processeurs "d'arrière plan" capables d'effectuer des opérations vectorielles et scalaires, d'une mémoire commune de très grande taille (soit 268 435 456 mots) et d'un processeur "d'avant plan" invisible à l'utilisateur et dont la tâche est d'assurer la supervision du système, les entrées-sorties et la synchronisation des 4 processeurs d'arrière plan en cas de travaux utilisant le multitâche

Le cycle de base du CRAY 2 est de 4,1 ns, à comparer aux 12,5 ns du CRAY 1, et aux 9,5 ns du CRAY_XMP. Les opérations vectorielles produisent un résultat tous les cycles. Cependant, pour les autres calculs il faut compter un cycle effectif égal à deux cycles de base, soit 8 ns.

L'environnement logiciel du CRAY 2 est donné par 2 compilateurs : le compilateur CFT2, dérivé du compilateur CFT09 pour CRAY 1, qui fonctionne actuellement sans avoir encore atteint une stabilité tout à fait satisfaisante; le compilateur CFT77, nouveau compilateur CRAY, beaucoup plus performant que le premier, mais pour l'instant moins rapide en raison de sa très récente mise en service.

Le système d'exploitation basé sur UNIX System V d'ATT, conçu initialement pour gérer des mini-ordinateurs, pose un certain nombre de problèmes d'adaptation et d'exploitation qui ne sont pas tous résolus .

1.1 - la conception d'algorithme pour machine multiprocesseur vectoriel asynchrone de type CRAY 2

Les difficultés inhérentes à la conception d'algorithme sur une telle machine parallèle résident dans la synchronisation des tâches et la gestion des conflits d'accès aux données partagées.

1.1.1 - le multitâche

Le multitâche permet l'exécution en parallèle, sur différents processeurs, de plusieurs parties d'un même programme. Ces parties se composent d'une suite d'instructions qui elles, sont exécutées séquentiellement.

Le programmeur devra donc concevoir un algorithme en le découpant en tâches, et en tenant compte du fait que le multitâche ne peut garantir que les tâches soient exécutées dans un ordre particulier, et qu'une tâche donnée se termine la première. Le multitâche est non déterministe par rapport au temps. Il est alors nécessaire d'utiliser des mécanismes de synchronisation et de communication entre les tâches.

1.1.2 - Synchronisation et communication

La synchronisation permet de définir des points de rendez-vous entre plusieurs tâches, durant leur exécution.

Ce mécanisme est généralement employé lorsqu'une tâche veut s'assurer que des variables ont bien été calculées par une autre tâche avant de les utiliser dans la suite du traitement.

Les points de synchronisation sont spécifiés par l'appel de primitives système. Il est possible de synchroniser globalement les tâches entre elles, grâce aux primitives telles que "lancer une tâche" (TSKSTART) ou "attendre la fin d'une tâche" (TSKWAIT), ou bien de synchroniser seulement une séquence d'instructions avec des événements.

La communication entre tâches n'est possible que par l'intermédiaire d'une mémoire commune. Les variables partagées entre les différentes tâches nécessitent des mécanismes de protection. Les machines de type CRAY2 permettent l'emploi de la notion classique de sémaphore pour protéger les sections critiques.

Les primitives de synchronisation

L'algorithme est destiné à être implémenté sur CRAY 2 et éventuellement SEQUENT. Nous disposons, pour exprimer l'exclusion mutuelle des primitives:

LOCKASGN identifie un nom de variable de type entier comme un verrou

LOCKON verrouille une section critique et rend la main à la tâche qui a fait la demande

LOCKOFF déverrouille une section critique et rend la main à la tâche qui a lancé l'appel

et pour simuler un rendez-vous des primitives de gestion des évènements:

EVASGN identifie une variable de type entier comme un évènement

EVWAIT attend jusqu'à ce qu'un évènement spécifique soit envoyé. Si l'évènement est déjà envoyé, la tâche n'attend pas

EVPOST envoie un évènement et rend le contrôle à la tâche qui a lancé l'appel; les tâches en attente peuvent reprendre leur exécution.

EVCLEAR efface l'envoi d'un évènement et rend la main à la tâche qui a effectué l'appel; les tâches qui, par la suite exécutent EVWAIT seront effectivement mises en attente.

La machine SEQUENT permet l'utilisation de primitives de gestion de rendez-vous telles que:

S_INIT_BARRIER identifie une variable qui va être utilisée comme rendez-vous pour exactement n processus

S_WAIT_BARRIER met le processus qui a fait l'appel en attente active jusqu'à ce que n tâches ait lancé cet appel; à ce moment les n tâches sont libérées de l'attente active.

1.1.3 - Etat des tâches

L'attribution d'un processeur physique à une tâche est totalement transparente pour le programmeur. Avant d'obtenir un processeur physique, une tâche doit obtenir un processeur logique par l'ordonnanceur de tâches (scheduler). L'ordonnanceur de tâches est aussi chargé de gérer les files d'attente dues aux "verrous" bloquants, aux évènements bloquants, et celle des processus en attente de processeur logique. C'est ensuite le système (C.O.S. : CRAY Operating System) qui gère le passage d'une tâche d'un processeur logique à un processeur physique.

1.1.4 - Gains attendus

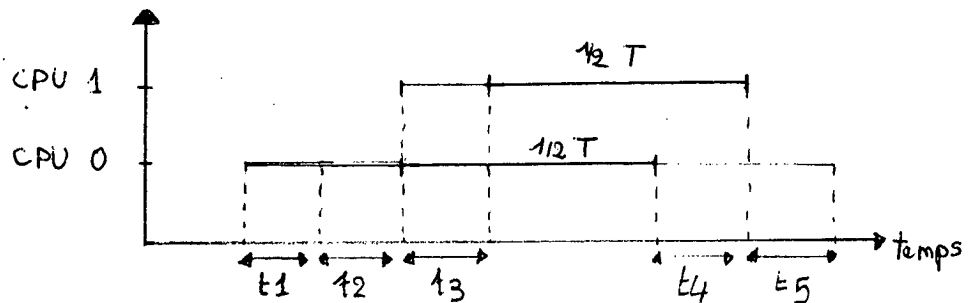
Théoriquement, le temps d'exécution d'un programme devrait dépendre linéairement du nombre de processeurs de la machine. Mais en pratique le parallélisme introduit de nouveaux facteurs (inexistants en mode séquentiel), tels que la synchronisation, et la communication, indispensables, mais qui contribuent à la dégradation des performances espérées.

Le multitâche devient intéressant si le temps gagné par l'exécution de tâches en parallèle est supérieur à celui engendré par la gestion de cette méthode.

Le facteur d'amélioration est calculé de la façon suivante:

$$A = \frac{\text{temps d'exécution avec 1 processeur}}{\text{temps d'exécution avec } n \text{ processeurs}}$$

Prenons l'exemple d'une machine biprocesseur sur laquelle les deux tâches exécutent chacune la moitié d'un traitement. L'une d'elles, appelée tâche initiale (similaire à un programme principal), est en plus chargée de lancer l'exécution de l'autre.



t1 : Préparation des paramètres de lancement de la deuxième tâche.

t2 : Appel de la primitive de lancement.

t3 : Prise en compte par CPU 1 de l'ordre de lancement.

t4 : Attente de la fin d'exécution de la deuxième tâche.

t5 : Prise en compte de la fin d'exécution.

Le temps d'exécution total du traitement est donc égal à $t1 + t2 + 1/2T + t4 + t5$, alors qu'en séquentiel il aurait été de T .

Le facteur d'amélioration vaut :

$$T / (t1 + t2 + 1/2T + t4 + t5)$$

Le multitâche est intéressant dans le cas où on a :

$$t1 + t2 + t3 + t4 + t5 < 1/2T.$$

Une bonne amélioration peut être obtenue lorsque les tâches sont de taille voisine. En effet, de cette manière le temps d'attente de fin d'exécution de tâche est minimisé.

D'autre part, la taille d'une tâche doit être suffisante par

rapport au surplus de code généré par le multitâche (appels de primitives). Une formule (voir [LA]) permet de calculer la taille minimale d'une tâche, pour obtenir une amélioration donnée.

Soient

X : taille minimale de la tâche, en tops d'horloge
NCPU : nombre de processeurs
A : amélioration désirée ($A < \text{NCPU}$)
S : temps utilisé pour gérer le multitâche, en tops d'horloge

$$X = \frac{A * \text{NCPU} * S}{\text{NCPU} - A}$$

On remarque que l'amélioration maximale ($A = \text{NCPU}$) n'est pas réalisable.

1.2 - Vectorisation

1.2.1 - principe

Pour traiter une opération sur un vecteur, les machines classiques sont obligées de passer par l'intermédiaire d'une boucle, dans laquelle l'opération s'effectue séquentiellement sur chacune des n composantes du vecteur. Par contre, les machines vectorielles dispose d'un jeu d'instructions élémentaires (addition, multiplication ...) qui ont été spécialement définies pour les vecteurs, et qui permet de traiter simultanément les n opérations.

Le langage Fortran utilisé pour programmer les machines de type CRAY ne possède pas d'instructions vectorielles. La vectorisation est réalisée de façon automatique par le compilateur Fortran, qui sait reconnaître certaines instructions vectorisables (boucles "DO" particulières).

Le champ d'application de la vectorisation est limité par la règle interdisant toute instruction DO, IF, GOTO, et CALL dans un corps de boucle. Seules les boucles les plus internes sont prises en compte. Les opérations vectorielles sur plusieurs niveaux de boucle échappent totalement au compilateur.

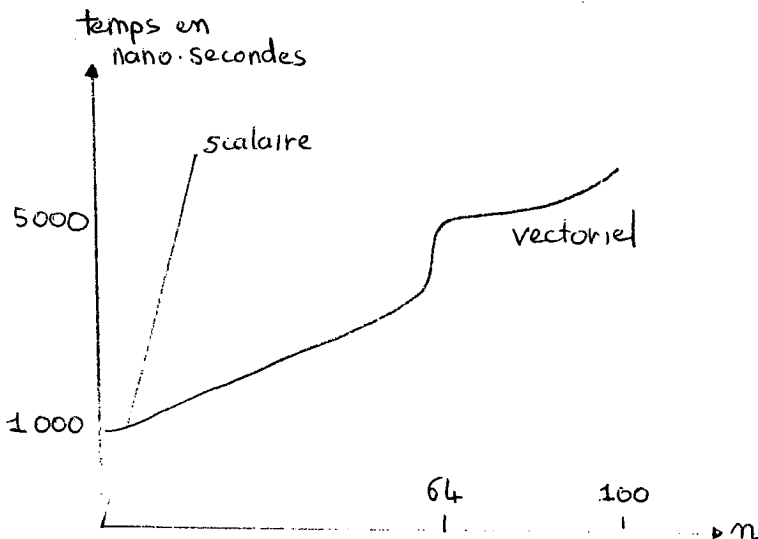
Par conséquent, le programmeur doit apporter beaucoup de soin à la traduction des opérations vectorielles de façon à écrire un code le plus vectorisable possible par le compilateur.

1.2.2 - gains attendus

Jusqu'à l'avènement des machines vectorielles, le temps d'exécution d'une opération sur un vecteur était proportionnel à la longueur n de ce vecteur. Etant donné S le temps d'exécution d'une opération sur deux scalaires, le temps d'exécution de l'opération sur deux vecteurs à n composantes valait nS .

Actuellement, une machine vectorielle comme le CRAY 2, se caractérise par un temps d'exécution de $D + nV$. V est défini comme S , mais très nettement inférieur grâce à l'emploi du pipeline ($S/V \approx 10$ sur le CRAY 1), et D représente le temps de démarrage.)

L'entier $n = D/(S-V)$, à partir duquel le gain dû à la vectorisation est appréciable, dépend de la machine. Le schéma suivant permet de comparer les temps d'exécution en mode scalaire et en mode vectoriel. Les mesures ont été faites pour l'addition sur le CRAY 1; la vitesse du CRAY 2 est sensiblement identique en scalaire, est peut être double en vectoriel.



Le décrochement à $n=64$ est dû à la taille des registres vectoriels. Les vecteurs sont stockés par tranches de 64 composantes.

Multitâche et vectorisation sont deux notions complémentaires, dont la combinaison laisse prévoir d'importants gains de temps.

2. ALGORITHME PARALLELE DE REDUCTION DU MULTIKNAPSACK

2.1 - Présentation

2.1.1 - Variables employées

Définition des variables :

Variables globales:

fin_phase_1	la phase 1	est terminée
fin_tâche_k	la tâche k	est terminée
contradiction_détectée	on ne peut pas trouver une solution	
meilleure que celle associée au minorant donné en entrée		
pb_résolu	la solution du problème	est connue
phase2_efficace	au moins une contrainte a été éliminée au	
cours de la phase 2		

NTA	: nombre de tâches actives
TC	: tableau indiquant l'état des contraintes
CPT	: nombre de tâches arrivées au rendez-vous
NBFINI	: nombre de tâches terminées
I_EVT	: numéro de l'évènement bloquant
FINSEM, CPTSEM, TCSEM sémaphores d'exclusion mutuelle	
EVENT(1..2) tableau d'évènements envoyés alternativement lorsque	
toutes les tâches ont terminé une itération de la phase 1	

Variables locales:

no_evt	: numéro de l'évènement qui est attendu par une tâche
--------	---

2.1.2 - Algorithme

Tâche initiale

DEBUT

- Lecture des données
- Initialisation des variables partagées
- Appliquer R1, R2, R3
- Mettre à jour NTA si le nombre de contraintes non éliminées est inférieur au nombre de processus.
- Lancer les tâches "traitement parallèle"
- Exécuter "traitement parallèle"
- Attendre fin d'exécution des tâches "traitement parallèle"

FIN

Tâche "traitement parallèle"

Paramètre transmis : k, le numéro de la tâche

DEBUT

-initialiser les variables locales

Tantque non fin_phase_1 et non fin_tâche_k faire

Tantque non (contradiction_détectée ou toutes les variables sont fixées ou toutes les contraintes sont traitées) faire

LOCKON(TCSEM)

-prendre une contrainte i à traiter

LOCKOFF(TCSEM)

-procédure de fixation de variables:

Calculer $[v(RB_i^0(w_1) | x_j = \varepsilon)]$

($w_1 = c_1/a_1$), $i \in \{1, 2, \dots, n\}$ et $j \in \{1, 2, \dots, n\}$,

Détecter une contradiction

Mettre à jour les valeurs fixées par la tâche k, du vecteur X solution du programme

Ftque

LOCKON(CPTSEM)

CPT=CPT + 1

no_evt=I_EVT

si CPT \neq NTA alors
 LOCKOFF(CPTSEM)
 EVWAIT(no_evt)

sinon
 LOCKOFF(CPTSEM)

-lire les résultats obtenus par chaque tâche
-détecter une contradiction
-détecter si toutes les variables ont été fixées
-détecter si au moins une variable a été fixée
-mettre à jour les composantes fixées à cette itération du vecteur X solution du programme
-appliquer R1, R2, R3 sur le problème réduit
-modifier le vecteur X en conséquence
-mettre à jour le tableau TC, indiquant l'état des contraintes pour l'itération suivante (à traiter, à ne pas traiter, éliminée).
-détecter si le nombre de contraintes non éliminées est inférieur au nombre de tâches actives (NCA<NTA), décider la fin des tâches en surplus.

CPT=0
I EVT=1-I EVT
EVCLEAR(EVENT(I EVT))
EVPOST(EVENT(1-I EVT))

fsi

Ftque

Si non_pb_résolu et non_fin_tâche_k alors

tantque non (toutes les contraintes sont traitées) faire
 LOCKON(TCSEM)
 -prendre une contrainte i, à traiter: TC(i)=1->TC(i)=2
 LOCKOFF(TCSEM)
 tantque il reste des contraintes j non éliminées et non
 utilisées pour éliminer la contrainte i faire
 LOCKON(TCSEM)
 -choisir j telle que TC(j) \neq 0
 LOCKOFF(TCSEM)
 -résolution en continu d'un knapsack:

 calculer $v(\overline{B^I_j})$

si $\lfloor v(\overline{B^I_j}) \rfloor \leq b_i$ alors
 LOCKON(TCSEM)
 si TC(j) \neq 0 alors TC(i)=0 fsi
 LOCKOFF(TCSEM)

fsi

ftque

ftque

```
LOCKON (FINSEM)
NBFINI:=NBFINI + 1
si NBFINI=NTA et non pb_résolu et phase2_efficace alors
-appliquer R3 au problème réduit
fsi
LOCKOFF (FINSEM)
```

fsi

FIN

2.1.3 - Synchronisation des tâches

En fin de chaque itération de la phase 1, les tâches travaillant en parallèles sont synchronisées, afin que les données du problème réduit soient mises à jour pour l'itération suivante.

Pour éviter une attente active, la synchronisation se fait à l'aide de deux événements fonctionnant en bascule (l'un des événements est toujours passant alors que l'autre est bloquant).

Le dernier processus actif en fin d'itération inverse l'état des deux événements, libérant ainsi les processus bloqués, tout en préparant le blocage sur l'autre événement pour l'itération suivante.

Cette technique suppose l'emploi:

- du compteur de tâches CPT reflétant à tout moment le nombre de tâches bloquées
- du sémaphore CPTSEM pour protéger l'accès à cette variable
- de deux événements EVENT[0] et EVENT[1]
- de la variable globale I_EVT contenant l'indice de l'évènement bloquant à un instant donné

Initialement, l'état des variables est le suivant:

CPT=0
CPTSEM passant
EVT[0] effacé
EVT[1] envoyé

2.1.4 - Procédure de fixation des variables

Introduction :

Il s'agit , ici, de présenter le corps de la boucle constituant le travail d'une tâche pendant la phase 1. Comme on peut le voir, cette étape très calculatoire, est destinée à bénéficier d'une optimisation par la vectorisation.

Rappelons, les données du knapsack (B_p) traité par la tâche k

$$(B_p) \quad \begin{array}{ll} \max cx & \\ \text{s.c. } A_p x \leq b_p & \\ x \in V & \end{array} \quad RB_p(w_i) \quad \begin{array}{ll} \max cx + w_i (b_p - A_p x) & \\ x \in V & \end{array}$$

Soit $v(B)$, la valeur d'un minorant de $v(B)$, valeur optimale
 Soient X_0, X_1 ensemble des indices des variables fixées à 0 et à 1
 au cours de itérations précédentes.
 Soient x_0^k, x_1^k , ensemble des indices des variables fixées à 0 et
 à 1 par la tâche k pendant l'itération en cours.
 Soit $X_2 = \{1..n\} - X_0 - X_1 - x_0^k - x_1^k$

Les tests d'élimination de variables sont appliqués au problème

$$\begin{aligned} \max \quad & \sum_{j \in X_1 \cup x_1^k} c_j + \sum_{j \in X_2, a_{pk} \neq 0} c_j x_j \\ \text{s.c.} \quad & \sum_{j \in X_2, a_{pk} \neq 0} a_{pj} x_j \leq b_p \end{aligned}$$

Nous donnons:

Procédure de fixation des variables:

CALCUL du vecteur $W=(w_i)$, $w_i=c_i/a_i$;
 CALCUL de la matrice $CR=(cr(i,j))$;
 $cr(i,j)=c_{pj} - w_i \cdot a_{pj}$
 CALCUL de la matrice $M=(m(i,j))$;
 $m(i,j) = [v(RB_p^0(w_i)) \mid x_j = \epsilon]$
 $= [w_i b_p + \sum_{l \in X_1 \cup x_1^k, a_{pl}=0} c_{pl} + \sum_{l \in X_2, a_{pl} \neq 0} cr(i,l) - |cr(i,j)|]$

Tantque ($j \in X_2, a_{pk} \neq 0$) et ($v(B)$ non optimale) faire
 CHERCHER un indice i_1 tel que $m(i_1, j) \leq v(B)$ et $cr(i_1, j) \neq 0$
Si i_1 trouvé alors
Tantque ($i \in X_2$ et $a_{pi} \neq 0$ et non i_2 trouvé) faire
 CHERCHER un indice i_2 , tel que $m(i_2, j) \leq v(B)$ et
 $cr(i_1, j) \cdot cr(i_2, j) < 0$
si i_2 trouvé alors on ne peut améliorer $v(B)$
sinon si $cr(i_1, j) > 0$ alors $x_1^k = x_1^k \cup \{i_1\}$
sinon $x_0^k = x_0^k \cup \{i_1\}$ fsi
fsi
Etque
fsi
Etque

2.1.5 - Résolution en continu d'un knapsack ([2], Fayard, Plateau)

Introduction : Ce traitement, constitue l'essentiel des calculs effectués par une tâche pendant le déroulement de la phase 2. On trouvera en annexe A1, la fonction SOLVE qui le réalise .

Jusqu'en 1977, $\overline{(B)}$ a toujours été résolu par l'algorithme classique appelé C.K.R. (i.e. Classical Knapsack Relaxation):

Algorithme C.K.R.

Trier les données pour obtenir (après renumérotation des variables)

$$c_{j1}/a_{j1} \geq c_{j2}/a_{j2} \geq \dots \geq c_{jn}/a_{jn} ;$$

$$k^* := \min \{ k \mid \sum_{p=1}^k a_{jp} > b \} ;$$

$$U := \{ j_1, \dots, j_{k^*-1} \} \cap \{1, \dots, n\}$$

$$\text{si } \sum_{j \in U} a_j = b \text{ alors } L = I - U$$

$$\text{sinon } i := j_{k^*} ;$$

$$L := I - (U \cup \{i\}) ;$$

$$\overline{x}_i := (b - \sum_{j \in U} a_j) / a_i$$

fsi

$$\forall j \in U \quad \overline{x}_j := 1 ;$$

$$\forall j \in L \quad \overline{x}_j := 0 ;$$

$$v(\overline{B}) := c \overline{x} .$$

Compte-tenu du temps de calcul prohibitif de la première étape de cet algorithme, le nouvel algorithme envisagé par Fayard et

Plateau pour résoudre $\overline{(B)}$ - appelé N.K.R. (i.e. New Knapsack Relaxation) - est une adaptation de la méthode déterminant les p plus grands éléments d'une liste de n nombres (p donné < n), qui est elle même dérivée de l'algorithme de tri Quicksort.

L'exposé de l' algorithme N.K.R. nécessite la donnée de

$$k \in J, \quad 1N \supset Q \supset J \\ Z = \bigcup_{j \in Q} \{z_j\} \text{ où } z_j \in \mathbb{R}, \forall j \in Q$$

la (Z, k) partition de J est définie par la réunion des trois sous-ensembles de J

$$U(J, Z, K) = \{ j \in J \mid z_j > z_k \}$$

$$E(J, Z, K) = \{ j \in J \mid z_j = z_k \}$$

$$L(J, Z, K) = (J - U(J, Z, K)) \cup E(J, Z, K)$$

Algorithme N.K.R. (Fayard, Plateau, [2])

```

J ≡ K ; U ≡ ∅ ; R ≡ ∪ { cj/aj }
                               j ∈ J
trouvé=faux;
Tantque ( non trouvé) faire
    Tantque    ∑j ∈ U aj    > b faire
        Sélectionner k ∈ J, et déterminer la (R,k) partition de J
        si ∑j ∈ U aj    > b
            alors J ≡ U(J,R,K)
            fsi
        Etque
            U ≡ U ∪ U (J,R,K) ;
            si ∑j ∈ U aj = b
                alors L ≡ I-U ;
                    trouvé=vrai
            sinon
                si b < ∑j ∈ U aj + ak
                    alors i <- k;
                        L ≡ I-(U ∪ {i}) ;
                        xi <- (b - ∑j ∈ U aj)/ai ;
                            trouvé=vrai
                sinon
                    si ∑j ∈ U aj    ≥ b
                        alors construire G | E(J,R,K) ⊃ G et j ∈ U ∪ E( J,R,k)
                            ∑j ∈ U aj ≤ b < ∑j ∈ U ∪ G aj + ap , p ∈ I-(U ∪ G) ;
                                U ≡ U ∪ G ;
                                si ∑j ∈ U aj = b
                                    alors L ≡ I-U
                                    sinon
                                        i <- p;
                                        L ≡ I-(U ∪ {i}) ;
                                        xi <- (b - ∑j ∈ U aj)/ai
                                            fsi
                                sinon
                                    U ≡ U ∪ E( J,R,k);
                                    J ≡ L(J,R,k)
                                        fsi
                                fsi
                    fsi
            fsi
    Etque

```

$\forall j \in U \quad \overline{x_j} := 1 \quad ; \forall j \in L \quad \overline{x_j} := 0 \quad ; \overline{v(B)} = c \overline{x}$.

L'algorithme N.K.R. est de complexité $o(|K|)$, ($|K|=n$ =nombre de variables), en moyenne.

2.1.6 - Discussion

- Synchronisation des tâches en phase d'élimination des variables

Il apparaît un point de synchronisation au sein de la boucle d'élimination des variables. C'est un rendez-vous qui sert faire une synthèse des résultats obtenus individuellement par chaque processus, et à mettre à jour les données du problème réduit pour la prochaine itération.

Nous avons abandonné l'idée d'une phase 1 asynchrone, pour les raisons suivantes:

1- il nous a semblé que le choix d'un **traitement asynchrone** était **mal adapté au problème** du fait que nous nous attendons à ce que les **traitements effectués en parallèle soient rapides et de longueur équivalente**. De ce fait, d'une part, la solution asynchrone pourrait engendrer un conflit d'accès aux variables partagées, par conséquent une attente très importante dans les sections critiques, par rapport au temps de calcul.

D'autre part, **la solution synchrone qui laisse les tâches exécuter une itération sans être bloquées, ne devrait pas être pénalisante du point de vue de l'attente au point de synchronisation** puisque les tâches arrivent en fin d'itération pratiquement simultanément.

2- Un autre facteur nous a poussé à abandonner la gestion asynchrone du traitement : les tests simples R1, R2, R3 doivent être effectués régulièrement, ils se prêtent mal à une répartition sur les tâches actives. La solution idéale est de les faire exécuter par une seule tâche à chaque fin d'itération. Encore faut-il pouvoir obtenir un état cohérent du système des contraintes. La *synchronisation* permet de **fixer pour un instant un état du problème réduit**.

Pour profiter au maximum de la réduction du temps de calcul due au parallélisme, il faut *minimiser le nombre de points de synchronisation*, le nombre de sections critiques et le nombre d'instructions exécutées en section critique.

Dans cette optique, nous avons placé **un seul rendez-vous à l'intérieur de la boucle destinée à éliminer des variables**.

Nous avons envisagé de synchroniser les tâches au fur et à mesure qu'elles traitent une contrainte différente, afin de réduire le temps de calcul des tâches, et éviter des calculs redondants . Nous avons jugé que le gain de temps serait trop faible par rapport au temps perdu en synchronisation.

- Gestion asynchrone de l'élimination des contraintes

Contrairement à la phase 1, la phase 2 est asynchrone. En effet, en phase 2 les besoins de communication entre les tâches sont très différents: au cours d'une itération de la boucle d'élimination des contraintes, les informations requises par une tâche sont les suivantes :

- l'état des contraintes : éliminée, traitée, à traiter pour sélectionner une contrainte i à éliminer
- l'état des contraintes : éliminée, active pour sélectionner une contrainte j - outil pour éliminer i -.

Etant donné que la résolution en continu de nombreux knapsacks est coûteuse, nous avons choisi de minimiser le nombre de knapsack (B^i_j) traités. Pour cela, les tâches ont besoin de l'information la plus récente possible. C'est pour cette raison que les tâches effectuent au minimum deux lectures de l'état des contraintes par itération. Une autre stratégie pourrait consister à minimiser le nombre de lectures en mémoire partagée, en envisageant une seule lecture au niveau de la sélection de la contrainte i .

Pour concevoir un système où les tâches effectuent de nombreuses lectures en section critique et peu d'écritures en section critique, notre objectif a été de minimiser le temps d'attente des tâches sur les lectures ou écritures en section critique. Le principe d'une gestion asynchrone semble alors le moins coûteux comparé à un gestion synchrone.

- La terminaison

La **terminaison générale de l'algorithme** peut se produire de deux manières différentes :

- **A la fin de la phase 2** : le problème peut être :

soit, inchangé : échec

soit, réduit mais non résolu

soit, résolu : toutes les variables sont fixées.

- **Au cours d'une itération de la phase 1** :

soit, l'une des tâches a détecté une contradiction signifiant que
la solution optimale du problème est celle associée au
minorant

soit, toutes les variables sont fixées.

Toutes les tâches actives en sont informées après le rendez-vous terminant l'itération. Les tâches sont terminées car le problème est résolu.

La terminaison d'une tâche peut se produire:

-en phase 1 : par application du test R2 , le nombre de contraintes peut devenir inférieur au nombre de tâches actives, alors que le problème n'est pas terminé .

- en phase 2 : il ne reste plus de contraintes à traiter.

2.2 - Description détaillée et codage

2.2.1 - Variables partagées ou locales ?

L'appellation variable partagée qui apparaît dans cette annexe, désigne une variable commune à plusieurs tâches parallèles, tandis qu'une variable locale désigne une variable réservée strictement à la tâche qui la déclare.

Les variables partagées seront notées en majuscules, pour les différencier des variables locales.

2.2.2 - Définition des variables partagées

Les données du problème:

NP	nombre de processeurs de la machine
NV	nombre de variables du problème au départ.
NC	nombre de contraintes saisies en entrée du programme.
C(1..NC)	tableau des coefficients de la fonction économique telle qu'elle est saisie par le programme en entrée.
A(1..NC,1..NV)	matrice des coefficients du système des contraintes du problème.
B(1..NV)	vecteur associé au second membre du système de contraintes
MIN	valeur d'une solution réalisable connue

Les variables caractérisant un état du problème :

AR(1..NCA,1..NVA), BR(NCA), CR(NVA)	contiennent les données du problème réduit, correspondent à A, B, et C.
F0, F1	signifie qu'au moins une variable a été fixée à 0 ou à 1 au cours de l'itération.
MODIF	une variable a été fixée au cours de l'itération.
MOPT	le minorant est la solution optimale du problème.
X1, X2	ensemble des variables, il y a 3 états possibles pour chacune des variables: -fixée à 0 -fixée à 1 - non fixée.

X1 est modifié au fur et à mesure, X2 mémorise l'état du vecteur à l'itération précédente.

NVA nombre de variables actives.
NVA1 nombre de variables actives à la fin de la phase 1.

NTA nombre de tâches actives.
NT nombre de tâches lancées en parallèle
 par la tâche initiale
NTA1 nombre total de tâches venues rendez-vous

NCA nombre de contraintes actives
NCA1 nombre de contraintes actives du problème à la sortie de
 la phase 1.

TX(1..NP,1..NV) tableau des résultats de chaque tâche :
TX(i,j)=0 ou 1 ou 2
DTX(1..NV) synthèse des résultats enregistrés dans
TX(1..NTA,1..NV).

TC(1..NC) tableau indiquant l'état des contraintes:
TC(i)=1 signifie que la contrainte est libre.
TC(i)=2 signifie que la contrainte a été élue par une tâche
TC(i)=0 signifie que la contrainte est éliminée.

TCR(1..NCA) tableau indiquant l'état des contraintes actives en phase 1:

TCR(i)=0 signifie que la contrainte est libre
TCR(i)=1 signifie que la contrainte a été élue par une tâche.

CPT nombre de tâches arrivées au rendez-vous.
NBFINI nombre de tâches arrivées en fin de la phase 2

FIN(1..NP) état des tâches : active ou inactive.

MINOPT(1..NP) détection de terminaison générale par une tâche
MINOPT(i)=vrai si la tâche i a détecté une contradiction.

I_EVT numéro de l'évènement bloquant
I_EVT=0 pendant l'exécution d'une itération d'ordre impair,
I_EVT=1 pendant l'exécution d'une itération d'ordre pair.

EVT(0..1) tableau d'évènements envoyés alternativement
lorsque les processus actifs ont terminé une itération de la phase 1.

CPTSEM, FINSEM, TCSEM sémaphores
d'exclusion mutuelle sur les variables respectivement:
CPT, NBFINI, TC, TCR et NCA.

2.2.3 - Les sections critiques

Les variables: TCR consultée et modifiée par les tâches parallèles en phase 1, TC et NCA, consultées et modifiées par les tâches parallèles en phase 2, mémorisent l'état des contraintes; on dispose du sémaphore TCSEM pour en verrouiller l'accès.

Les compteurs de tâches arrivées en fin de phase 1 (CPT), et en fin de phase 2 (NBFINI) sont les seules autres variables exigeant un traitement en exclusion mutuelle.

2.2.4 - Définition des variables locales

no_ta numéro de la tâche
iter numéro du prochain rendez_vous = numéro de l'itération
n nombre de variables non fixées connu par une tâche
succes1 succès du test R1 (élimination de variables) (phase 1)
succes2 succès du test R2 (élimination de contrainte) (phase 1)
no_evt numéro de l'évènement attendu par les tâches qui sont
 arrivées au rendez-vous avant la dernière tâche.

2.2.5 - Définition des procédures utilisées

COND (données: TC(1..NC), TCSEM, i, j; résultat : j) : entier;

-rend le numero de la contrainte j telle que :

j≠i, TC(j) indique que j non éliminée, (i,j) n'a pas déjà été traité par la tâche.

-met à jour j indice de la dernière contrainte utilisée.

-rend 0 si échec dans la recherche

CONTROL(données: TX(1..NV); résultats: MODIF, MOPT, F0, F1)

-détecte une contradiction entre les modifications proposées séparément par les différents processus (MOPT).

-détecte la réduction (MODIF).

-détecte si une variable au moins, a été fixée à 1 (F1) ou à 0 (F0).

ECRES

-écriture sur fichier des résultats du programme:

taille du problème réduit en fin de phase 1 : NCA1, NVA1

taille du problème réduit en fin de phase 2 : NCA, NVA
numéro des contraintes éliminées
numéro, indice et valeur des variables fixées
S'il y a eu réduction complète, valeur de la solution du problème
et caractère réalisable ou non de cette solution.

ELIMK (données: k, i, A(1..NC,1..NV), B(1..NC), X1(1..NV):
booléen ;

-calcule la valeur du knapsack formé de la première partie de la
contrainte k sous la contrainte i, en relachant la condition

d'intégrité sur les variables: $v(\overline{B_i^k})$

-compare la valeur calculée $v(\overline{B_i^k})$ avec B(k)
-si cette valeur est inférieure, rend vrai.

FIXVAR (données: no_ta, AR(1..NC,1..NV), BR(1..NC), CR(1..NV),
MIN; résultats: minopt, TX, n)

- calcule $v(RB_i^0(w_p) | x_k = \varepsilon)$, pour $(w_p) = (c_p/a_p), p=1, \dots, n$ et
 $k=1, \dots, n, \varepsilon=0$ (resp. 1), si $c_{pk} - w_p a_{pk} > 0$ (resp. < 0)

-cherche pour chaque variable x_k une valeur qui soit inférieur
au minorant choisi pour le problème .

-mémorise dans TX(no_ta) les valeurs des variables éventuellement
fixées

-détecte les contradictions telles que: $x_i < 0$ et $x_i < -1$, le
mémorise dans minisbest

-met à jour n, en fonction de ses propres résultats.

LECDON

-effectue la lecture sur fichier des données du problème : A, B, C,
MIN

-écrit sur le fichier des résultats, le nom du jeu d'essai et la la
valeur du minorant utilisé.

MAJ (données: TX(1..NV), X1(1..NV) ; résultats: DTX(1..NV),
TX(1..NP,1..NV), X1(1..NV))

-enregistre les résultats réunis de routes les tâches actives en
phase 1 dans le tableau DTX.

-met à jour le vecteur X1, en fonction des résultats produits par
les tâches.

-efface TX, prêt pour la prochaine itération.

MAJR1 (données : DTX(1..NV; données-résultats: NVA,NCA,
AR(1..NCA,1..NVA), BR(1..NCA), CR(1..NVA))

-met à jour les données du problème réduit par une itération de la phase 1.

MAJR2 (données: NV, NC, X1(1..NV), TC(1..NC), A(1..NC,1..NV),
B(1..NC) ; résultats: AR(1..NCA,1..NVA), BR(1..NC))

-met à jour AR et BR (données du problème réduit), à la fin de la phase 2

-met à jour les données du problème réduit par une itération de la phase 1.

NOUVEAU (données: DTX(1..NV),X2(1..NV), TCR(1..NCA); résultat:
TCR(1..NCA))

-met à jour TCR pour l'itération suivante, en particulier : détecte les contraintes actives qui n'ont pas été touchées par l'élimination des variables.

NUM_C(données:ir, NC, TC(1..NC)) :entier;

-calcule l'indice de la contrainte ir du problème réduit, par rapport au problème d'origine.

NUM_R(données: is, X1(1..NV)): entier;

-calcule l'indice de la contrainte is du problème source, par rapport au problème réduit.

NUM_V(données: ir, NV, X1(1..NV)): entier;

-calcule l'indice de la variable ir dans le problème réduit, par rapport au problème source.

NUMO_V(données: ik, no_c, no_ta, TX(1..NV), X1(1..NV)): entier;

-calcule l'indice de la variable ik du problème de knapsack traité par la tâche no_ta, dans le sous programme FIXVAR, par rapport aux données du problème source.

R1 (données: AR(1..NCA,1..NVA), BR(1..NCA); résultats:
AR(1..NCA,1..NVA), CR(1..NVA), X1(1..NV), NVA)

-calcule la valeur correspondant à $BR(k) - (\text{somme des } AR(k,i) \text{ tels que } x_i < -1) \text{ } i \in \{1, \dots, NVA\}, k \in \{1..NCA\}$

- compare chaque coefficient $AR(k,i)$ non nul
- en déduit les variables x_i telles que $x_i < -0$
- inscrit dans le vecteur $X1$ ses résultats

R2 (données-résultats: $AR(1..NVA)$, $BR(1..NCA)$; résultat: $TCR(1..NCA)$, $TC(1..NC)$, NCA , succes)

- calcule pour $k \in \{1..NCA\}$ la valeur correspondant à $\sum_i AR(k,i)$, $i \in \{1..NV\}$.
- compare cette valeur avec $BR(k)$
- en déduit si la contrainte est redondante
- modifie TC , TCR , NCA , succes si nécessaire

R3 (données: $AR(1..NCA, 1..NVA)$, $X1(1..NV)$; résultats: NVA , $X1(1..NV)$, $AR(1..NCA, 1..NVA)$, $CR(1..NVA)$)

- lit successivement les termes $AR(i,j)$, pour chaque variable x_j , c'est à dire par colonne, tels que la contrainte i ne soit pas éliminée, jusqu'à ce qu'on tombe sur un terme non nul
- si pour une variable x_j , on lit tous les termes $AR(i,j)$ sans en trouver un vérifiant la propriété ci-dessus, alors x_j est fixée à 1.

SOLVE (données: a , b , c , n ; résultat: ib ,): réel;

- calcule la valeur du knapsack K ($\max cx$, s.c. $ax \leq b$, $x \in [0,1]^n$) e continu

- calcule ib , l'indice du multiplicateur w_{ib} tel que

$$v(RK(w_{ib})) = v(K)$$

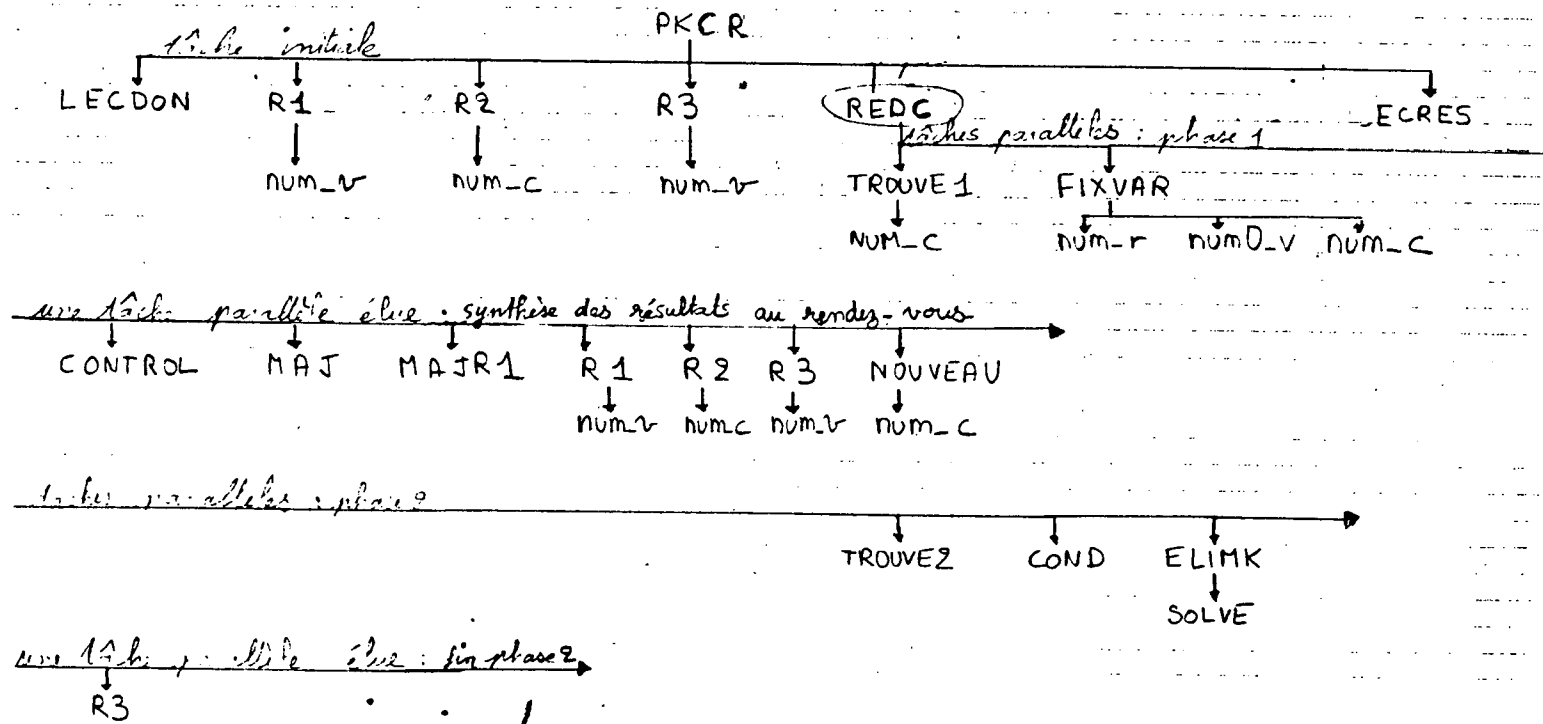
TROUVE1 (données: $TCR(1..NCA)$, $TCSEM$; résultat: i)

- cherche un indice i tel que $TCR(i)$ indique que la contrainte i est à traiter en phase 1 : $i =$ contrainte telle que $TCR(i) = 0$;
- change l'état de $TCR(i)$: $TCR(i) = 1$
- utilise le sémaphore $TCSEM$ pour réaliser l'exclusion mutuelle sur l'accès à la variable TCR .

TROUVE2 (données: $TC(1..NC)$, $TCSEM$; résultat: i)

- cherche un indice i tel que $TC(i)$ indique que la contrainte i est à traiter en phase 2 : $i =$ contrainte non éliminée;
- change l'état de $TC(i)$: $TC(i) = 0$
- utilise le sémaphore $TCSEM$ pour réaliser l'exclusion mutuelle sur l'accès à la variable TC .

ARBRE DES APPELS



2.2.6 - Initialisation des variables partagées

```
I_EVT=0
EVASGN(EVT(I_EVT));
EVASGN(EVT(1-I_EVT));
EVPOST(EVT(1-I_EVT))

LOCKASGN(FINSEM);
LOCKASGN(TCSEM);
LOCKASGN(CPTSEM);

NCA1:= NC;
NCA:= NC;
NVA:=NV;
NVA1:=NV;
CPT:=0; NBFINI:= 0;

Pour i:=1 à NTA faire
    fin(i):= faux;
    MINOPT(i):=faux
Fait

Pour i:=1 à NV faire
    CR(i)=C(i)
    X1(i):=2;
    X2(i):=2;
    TX(i):=2;
    TC(i):=1;
    TCR(i)=0
Fait;
Pour i:=1 à NC faire
    BR(i)=B(i)
    Pour j:=1 à NV faire
        AR(i,j)=A(i,j)
    Fait;
Fait;
MODIF:= faux;
MOPT:= faux;
F0=faux;F1=faux;
```

2.2.7 - Initialisation des variables locales

```
n:=NVA;
succes1:=faux;
succes2:=faux;
iter=0
no_evt=0
```

2.2.8 - Algorithme

Tâche initiale

DEBUT

- Lecture des données
- Initialisation des variables partagées
- Réduction selon R1, R2, et R3
- Mise à jour des variables NTA, FIN(1..NP)
- Lancer les tâches "traitement parallèle"
- Exécuter "traitement parallèle"
- Attendre fin de toutes les tâches lancées en parrallèle

FIN.

Tâche "traitement parallèle"

Paramètre transmis : no_ta, le numéro de la tâche

DEBUT

Tantque non(MOPT ou NVA=0 ou FIN(no_ta)) et MODIF faire

n:= NVA;

Tantque non MINOPT(no_ta) et TROUVE1(TCR, TCSEM, i) et n≠0 faire

FIXVAR(i, AR, CR, BR, MIN, TX(no_ta), MINISBEST(no_ta), n);

Ftque;

P(CPTSEM)

CPT:=CPT + 1;

no_evt=I_EVT


```
Si non ( MOPT ou NVA=0 ou NCA=1 ou FIN(no_ta))
Alors i:=1;
      Tantque TROUVE2(TC, TCSEM, i) ≤ NC faire
        j:=1;

        Tantque COND(TC, TCSEM, i, j) ≤ NC faire
          Si ELIMK(i, j, A, B)
            Alors P(TCSEM)
                  Si TC(j)≠0
                    Alors TC(i)=0
                      NCA=NCA -1
                    Fsi
                  V(TCSEM)
            Fsi

          Etque
            Etque;
            P(FINSEM)
            NBFINI := NBFINI + 1
            Si NBFINI = NTA et NCA≠0 et NCA ≠ NCA1
              Alors MAJR2(A, X1, TC, AR)
                R3(AR,NVA,X1)
            Fsi
            V(FINSEM)
          Fsi
        FIN
```

2.3 - Choix effectués pour le codage en Fortran 77

2.3.1 - **Pour une version unique**

Le compilateur Fortran 77, tel qu'il existe actuellement sur le CRAY 2, permet de déclarer des variables communes aux différentes tâches lancées dans un même programme - instruction COMMON. Par contre, on ne peut pas déclarer des variables communes à des sous-programmes appelés par des tâches différentes, sans que celles ci ne soient nécessairement partagées par ces tâches. L'instruction "Task Common", qui existe à cet effet n'est pas en service.

Le logiciel CREM, qui a servi à mettre au point le programme, permet de déclarer: des variables partagées entre les tâches -instruction COMMON\$, et des variables locales à une tâche, partagées par des sous-programmes appelés -instruction COMMON -.

Nous nous sommes efforcés de développer une version unique du programme PKCR, dans les limites des contraintes logicielles, telles que celle évoquée ci-dessus.

2.3.2 - **Limiter le nombre de paramètres des sous-programmes**

Le passage de paramètres est plus rapide par l'instruction COMMON.

Pour les variables partagées, on peut les déclarer dans un COMMON, dans le sous-programme appelé et appelant, par contre, on est obligé de transmettre les variables locales, comme paramètres du sousprogramme appelé.

2.3.3 - **Optimisation du code**

Pour accélérer l'exécution du code FORTRAN, nous nous sommes efforcés de désenboîter les boucles imbriquées, de placer les boucles les plus longues au niveau le plus bas, et de faire appel à des fonctions optimisées de la bibliothèque \$SCILIB.

Parmi les fonctions optimisées de la bibliothèque \$SCILIB, nous avons surtout utilisé les suivantes:

ISEARCH(n,vecteur,inc,objet) fonction de type entier, donne l'indice du premier élément du vecteur ayant pour valeur objet.

SAXPY(N,SA,SX,INCX,SY,INCY) calcule $Y = AX + Y$

Chaque fois que le nombre d'itérations d'une boucle est suffisant, il devient intéressant de la vectoriser.

La séquence : *si (var.op.expression) var=expression* empêche la vectorisation d'une boucle. Elle peut être optimisée par une instruction de la forme *var=function(var,expression)*, où *function* est une version des fonctions MAX/MIN. Ainsi, on ramène une boucle non vectorisable à une boucle vectorisable.

Pour les instructions de type *si(expression logique) var=expression*, nous avons employé la fonction **CVMGT**:
var=CVMGT(expression, var, condition).

3. LISTING DU PROGRAMME PR²

```
*****
*
*      Bienvenue sur le CRAY-2 du CCVR
*
*****
No mail.
news: assist.June10 com.June09 planning plncar.Mai20 disk_sp.May24
trap 'jar -t'

cd ft

rm -f pkr.f

jad

cat <<'EOF' >pkcr.f
    program pkcr

c parallel knapsack reduction

    implicit integer(a-z)

c definition des constantes

    parameter(np=4)
    parameter (nvmax=199,ncmax=101)
    parameter(res=11)

c definition des variables partagees

    common/donnees/nv,nc,a(ncmax,nvmax),b(ncmax),c(nvmax)
    common/e_glob/f0,f1,modif,mopt
    common/e_proc/fin(np),tx(np,nvmax),minopt(np),nta,nta1
    common/e_cont/tc(ncmax),nca,nca1,tcr(ncmax)
    common/e_var/nva,nva1,x1(nvmax),x2(nvmax)
    common/e_prob/ar(ncmax,nvmax),br(ncmax),cr(nvmax)
    common/sync1/cpt,evt(0:1),cptsem,i_evt
    common/sync2/nbfini,finsem,tcsem
    dimension tca(3,np)
    logical fin,f0,f1,modif,mopt,minopt,succes1,succes2
    external redc

c lecture des donnees

    call lecdon

c lecture du nombre de taches

    write(res,*)"nombre de taches?"
    read(*,*)nta
    write(res,*)nta

c initialisation des variables partagees

    do 22 i=1,nc
        br(i)=b(i)
22  continue
    do 23 i=1,nv
        cr(i)=c(i)
23  continue
    do 24 i=1,nc
        do 241 j=1,nv
            ar(i,j)=a(i,j)
241  continue
24  continue
```

```
f0=.false.
f1=.false.
modif=.false.
mopt=.false.
cpt=0
nbfini=0
nva=nv
nta=min0(nta,nc)
nca=nc
nca1=nc

do 8 j=1,nv
    x1(j)=2
    x2(j)=2
8    continue
do 81 j=1,nv
    do 7 i=1,nta
        tx(i,j)=2
7    continue
81   continue
do 9 i=1,nc
    tc(i)=1
    tcr(i)=0
9    continue

do 13 i=1,nta
    fin(i)=.false.
    minopt(i)=.false.
13   continue

c reduction selon r1,r2,r3

if(nv.gt.0)call r1(res+1,succes1)
if(nc.gt.0)call r2(res+1,succes2)
if(nva.gt.0)call r3(res+1)
if(nva.ne.nv)then
    do 15 i=1,nv
        x2(i)=x1(i)
15    continue
endif

c mise a jour de nta et fin(np)

if(nca.lt.nta)then
    nta=nca
    do 20 i=nta,nca+1,-1
        fin(i)=.true.
20    continue
endif
nta1=nta

c initialisation des evenements et des verrous

if(nta.gt.1)then
    call lockasgn(finsem)
    call lockasgn(tcsem)
    call lockasgn(cptsem)
    call evasgn(evt(0))
    call evasgn(evt(1))
    i_evt=0
    call evpost(evt(1))

c activation des taches paralleles
nt=nta
do 21 i=1,nta-1
    tca(1,i)=3
```

```

                                tca(3,i)=i
                                call tskstart(tca(1,i),redc)
21      continue
      endif

      call redc

c attente de fin d'execution des taches paralleles

      if(nt.gt.1)then
        do 25 i=1,nt-1
          call tskwait(tca(1,i))
25      continue
        endif
c ecriture des resultats

      call ecres
      stop
      end
c*****
      subroutine redc

c traitement effectue par une tache
c gestion des conflits d'accès aux variables partagees :nbfini,cpt,tc,nca
c avec les verrous :finsem, cptsem et tcsem
c gestion d'un rv avec un evenement : evt
c traitement comportant :2 phases distinctes et successives
c - phase 1: pour fixer les variables
c - phase 2: pour eliminer des contraintes
c nb : les taches sont synchronisees apres la phase 1

      implicit integer(a-z)

c definition des constantes

      parameter(np=4)
      parameter (nvmax=199,ncmax=101)
      parameter(res=11)

c definition des variables partagees

      common/donnees/nv,nc,a(ncmax,nvmax),b(ncmax),c(nvmax)
      common/e_glob/f0,f1,modif,mopt
      common/e_proc/fin(np),tx(np,nvmax),minopt(np),nta,nta1
      common/e_cont/tc(ncmax),nca,nca1,tc(ncmax)
      common/e_var/nva,nva1,x1(nvmax),x2(nvmax)
      common/sync1/cpt,evt(0:1),cptsem,i_evt
      common/sync2/nbfini,finsem,tcsem

      logical fin,f0,f1,modif,mopt,minopt,succes1,succes2
      logical elink

      call tskvalue(no_ta)
      no_ta=no_ta+1
      u=res+no_ta
      write(u,*)"no_ta=",no_ta
      iter=0
      write(u,*)"phase 1"
      go to 1
10     continue
      if (mopt.or.nva.eq.0.or.fin(no_ta).or..not.modif) go to 101
1      continue
      iter=iter+1

c phase 1:fixer des variables

```

```

n=nva
i=0
100 continue
  if(minopt(no_ta))go to 111
  if(n.eq.0)go to 111
  if(i.ge.nca)go to 111
  i=trouve1(i,u)
  if(i.eq.0)go to 111
  call fixvar(no_ta,i,n)
  go to 100

c fin des calculs individuels : rendez-vous

111 continue
  write(u,*)"rendez-vous ",iter

  if (nta.gt.1)then
    call lockon(cptsem)
    cpt=cpt+1
    no_evt=i_evt

c attente sur l'envoi de l'evt indiquant la fin du travail de synchro,
c travail execute par la derniere tache arrivee au r.v.
    if(cpt.ne.nta)then
      call lockoff(cptsem)
      call evwait(evt(no_evt))
      go to 10
    endif
    call lockoff(cptsem)
    nta1=nta
  endif

c collecte des resultats obtenus par les taches actives
c la tache effectuant la collecte est la derniere tache qui est arrivee
c au rendez-vous

  if (isearch(nta,minopt(1),1,.true.).le.nta)mopt=.true.
  if (.not.mopt)then
    write(u,*)"non mopt au 1er controle"
    call control
    if(.not.mopt)then
      write(u,*)"non mopt au 2eme controle"
      if (modif)then
        write(u,*)"modif=vrai"
        call maj
        call majr1
        succes1=.false.
        if(f1.and.nva.ne.0)call r1(u,succes1)
        if ((f0.or.succes1).and.nva.ne.0)then
          succes2=.false.
          call r2(u,succes2)
          if(succes2) call r3(u)

c desactivation de certaines taches si le nombre de contraintes est
c devenu inferieur au nombre de contraintes du probleme reduit

          if (nva.ne.0.and.nca.lt.nta)

*then
          do 13 i=nta,nca+1,-1
            fin(i)=.true.
13      continue
          nta=nca

          endif
        endif
      if(nva.ne.0)then

```



```
endif

c      else
c      write(u,*)"elink(",i," ",j," ")=faux"

      endif
      go to 21

201      continue
      write(u,*)"phase 2 terminee"

c fin des tests pour eliminer des contraintes
c fin de la tache, si la tache est la derniere a se terminer alors:
c fin du programme : appliquer r3 si besoin.

      if (nta.gt.1) call lockon(finsem)
      nbfini =nbfini+1
      if(nbfini.eq.nta)then
        if (nca.ne.nca1)then
          write(u,*)"r3"
          if(nca.gt.0)call majr2
          call r3(u)
        endif
      endif
      if (nta.gt.1) call lockoff(finsem)
      endif

      write(u,*)"tache terminee"

      return
      end

c*****
      subroutine fixvar(no_ta,no_c,n)

c calcule une matrice de majorants de la valeur du knapsack
c extrait du probleme source, en deduit les variables qui pourront
c etre fixees

      implicit integer(a-z)

c definition des constantes
      parameter(res=11)
      parameter(np=4)
      parameter (nvmax=199,ncmax=101)

c definition des variables partagees

      common/donnees/nv,nc,a(ncmax,nvmax),b(ncmax),c(nvmax)
      common/e_prob/ar(ncmax,nvmax),br(ncmax),cr(nvmax)
      common/e_proc/fin(np),tx(np,nvmax),minopt(np),nta,nta1
      common/e_var/nva,nva1,x1(nvmax),x2(nvmax)
      common/saisie/min

c      common/y/ y
      logical fin,minopt,xk(2,nvmax)
      dimension ck(nvmax),ak(nvmax),mj(nvmax,nvmax)
      real y(nvmax,nvmax),lambda(nvmax),r(nvmax)

c initialiser les variables locales

      u=res+no_ta

      do 4 i=1,nva
```

```

        ck(i)=cr(i)
        ak(i)=ar(no_c,i)
4      continue

        bk=br(no_c)
        nk=nva

        do 6 j=nv,1,-1
        if(x1(j).eq.2)then
            jr=num_r(j)
            if (tx(no_ta,j).ne.2.or.ak(jr).eq.0)then
                if(tx(no_ta,j).eq.1)bk=bk-ak(jr)
                do 7 i=jr,nk
                    ak(i)=ak(i+1)
                    ck(i)=ck(i+1)
7              continue
                nk=nk-1
            endif
        endif
6      continue
        if(nk.eq.0)return

        do 1 i=1,nk
            do 2 j=1,nk
                y(i,j)=0.
                mj(i,j)=0
2          continue
1      continue
        do 3 i=1,nk
            xk(1,i)=.false.
            xk(2,i)=.false.
            lambda(i)=0.
            r(i)=0.
3      continue

```

c tests r1 et r2 appliques au knapsack

```

        if(n.lt.nva)then
            do 24 j=nk,1,-1
                if(ak(j).gt.bk)then
                    j0=num0_v(j,no_c,no_ta)
                    tx(no_ta,j0)=0
                    write(u,*)"x",j0,"<— 0"
                    n=n-1
                    nk=nk-1
                    do 22 i=j,nk
                        ck(i)=ck(i+1)
                        ak(i)=ak(i+1)
22                continue
                    endif
24            continue
            if(nk.eq.0)return
            s=0
            do 23 j=1,nk
                s=s+ak(j)
23        continue
            if(s.le.bk)return

            endif

```

c calculer la matrice des majorants de la valeur du knapsack

```

s=0
do 20 j=1,nv
    if(x1(j).eq.1)then
        s=s+c(j)
    endif
20 continue

```



```

else
    if(tx(no_ta,j).eq.1)then
        s=s+c(j)
    else
        if(a(num_c(no_c),j).eq.0)s=s+c(j)
    endif
endif
20 continue
do 21 i=1,nk
    r(i)=real(s)
21 continue

do 81 i=1,nk
    lambda(i)=real(ck(i))/real(ak(i))
81 continue
call saxpy(nk,real(bk),lambda,1,r,1)
do 8 i=1,nk
    do 9 j=1,nk
        y(i,j)=real(ck(j))-lambda(i)*real(ak(j))
        r(i)=r(i)+amax1(y(i,j),0.0)
9    continue

    do 10 j=1,nk
        mj(i,j)=max0( int(r(i) - abs(y(i,j))) - min ,0)
10    continue
8    continue

c lire mj, remplir xk et minopt

do 11 j=1,nk
    i=0
14    continue
    i=i+1
    i=i+isearch(nk+1-i,mj(i,j),1,0)-1
    if(i.le.nk)then
        if(y(i,j).gt.0)xk(2,j)=.true.
        if(y(i,j).lt.0)xk(1,j)=.true.
        if(i.lt.nk.and..not.(xk(1,j).and.xk(2,j)))go to 14
        if(xk(1,j).and.xk(2,j))minopt(no_ta)=.true.
        if(minopt(no_ta))return
    endif
11    continue

c collecte des resultats: lecture de xk, remplir tx(no_ta,*)

do 13 j=nk,1,-1
    if (xk(1,j))then
        j0=num0_v(j,no_c,no_ta)
        tx(no_ta,j0)=0
        write(u,*)"x",j0,"< 0"
        n=n-1
    else
        if(xk(2,j))then
            j0=num0_v(j,no_c,no_ta)
            tx(no_ta,j0)=1
            n=n-1
            write(u,*)"x",j0,"< 1"
        endif
    endif
13    continue

```

```

      return
    end

*****
      subroutine r1(u,succes)

c detecte les variables qui peuvent etre fixees a 0
c enregistre les resultats, nva x1
c modifie les donnees du probleme reduit

      implicit integer(a-z)

c definition des constantes

      parameter (nvmax=199,ncmax=101)

c definition des variables partagees

      common/donnees/nv,nc,a(ncmax,nvmax),b(ncmax),c(nvmax)
      common/e_cont/tc(ncmax),nca,nca1,tc(ncmax)
      common/e_var/nva,nva1,x1(nvmax),x2(nvmax)
      common/e_prob/ar(ncmax,nvmax),br(ncmax),cr(nvmax)
      logical succes

c code optimise pour etre vectorise

      k=0
      do 20 j=1,nca
        do 21 i=nva,1,-1
          if (ar(j,i).gt.br(j))then
            succes=.true.
            nva=nva-1
            i0=num_v(i)
            x1(i0)=0
            write(u,*)"R1 : x",i0,"<-0"
            do 22 k=i,nva
              do 231 l=1,nca
                ar(l,k)=ar(l,k+1)
231              continue
                cr(k)=cr(k+1)
22            continue
          endif
21        continue
20      continue

      return
    end
*****
      subroutine r2(u,succes)

c detecte les contraintes redondantes
c enregistre les resultats: nca, tc, tcr, succes
c modifie les donnees du probleme reduit : ar,tar,br

      implicit integer(a-z)

c definition des constantes

      parameter (nvmax=199,ncmax=101)

c definition des variables partagees

      common/donnees/nv,nc,a(ncmax,nvmax),b(ncmax),c(nvmax)
      common/e_cont/tc(ncmax),nca,nca1,tc(ncmax)
      common/e_var/nva,nva1,x1(nvmax),x2(nvmax)
```

```

common/e_prob/ar(ncmax,nvmax),br(ncmax),cr(nvmax)

dimension s(ncmax)
logical succes

do 19 j=1,nca
    s(j)=0
19    continue

do 20 j=nca,1,-1
    do 210 i=1,nva
        s(j)=s(j) + ar(j,i)
210    continue
        if (s(j).le.br(j))then
            nca=nca-1
            succes=.true.
            j0=num_c(j)
            tc(j0)=0
            write(u,*)"R2 : tc(",j0,")=0"
            do 21 k=j,nca
                tcr(k)=tcr(k+1)
                br(k)=br(k+1)
                do 222 i=1,nva
                    ar(k,i)=ar(k+1,i)
222                continue
            21    continue
        endif
20    continue

return
end

C*****
subroutine r3(u)

c detecte les variables a fixer a 1
c met a jour: nva, x1
c modifie les donnees du probleme reduit : ar,tar,cr

    implicit integer(a-z)

c definition des constantes

    parameter (nvmax=199,ncmax=101)

c definition des variables partagees

    common/donnees/nv,nc,a(ncmax,nvmax),b(ncmax),c(nvmax)
    common/e_cont/tc(ncmax),nca,nca1,tcr(ncmax)
    common/e_var/nva,nva1,x1(nvmax),x2(nvmax)
    common/e_prob/ar(ncmax,nvmax),br(ncmax),cr(nvmax)

    if (nca.eq.0)then
        do 30 k=1,nv
            x1(k)=min0(1,x1(k))
30    continue
        nva=0
        return
    endif

do 20 j=nva,1,-1
    i=0
21    i=i+1
        if(ar(i,j).eq.0)then
            if(i.lt.nca)go to 21
            if(i.eq.nca)then

```

```

nva=nva-1
j0=num_v(j)
x1(j0)=1
write(u,*)"R3 : x",j0,"<-1"
do 212 k=j,nva
    cr(k)=cr(k+1)
    do 221 l=1,nca
        ar(l,k)=ar(l,k+1)
221    continue
212 continue
endif
endif
20 continue

return
end
*****
subroutine ecres

c ecriture des resultats sur un fichier de sortie

implicit integer (a-z)

c definition des constantes

parameter (nvmax=199, ncmax=101)
parameter (res=11)

c definition des variables

common/donnees/nv,nc,a(ncmax,nvmax),b(ncmax),c(nvmax)
common/e_glob/f0,f1,modif,mopt
common/saisie/min
common/e_cont/tc(ncmax),nca,nca1,tcr(ncmax)
common/e_var/nva,nva1,x1(nvmax),x2(nvmax)

dimension xx0(nvmax),xx1(nvmax),ce(ncmax)
logical f0,f1,modif,mopt

c ecriture des resultats

write(res,99) nc,nv
99 format("taille du probleme initial: ",i3,i4)

c probleme pour lequel la valeur de la solution donnee
c comme minorant de la valeur optimale du probleme est optimale

if (mopt) then
    write(res,106) min
    write(res,100) nca,nva
else

    if(nva.eq.0)nca=0
    write(res,15) nca1,nva1
15 format("phase 1: taille du probleme reduit: ",i3,i4)
    write(res,100) nca,nva
100 format("phase 2: taille du probleme reduit: ",i3,i4)

c probleme avec des contraintes eliminees

if (nva.ne.0.and.nca.lt.nc) then
    write(res,101)

```

```
101      format("numero des contraintes eliminees: ")
        nbce=0
        do 10 i=1,nc
            if (tc(i).eq.0)then
                nbce=nbce+1
                ce(nbce)=i
            endif
10      continue
        write(res,102) (ce(i),i=1,nbce)
102      format(30i3)
        .
    endif
```

c probleme avec des variables fixees

```
    if (nva.lt.nv) then
        nv0=0
        nv1=0

        do 11 i=1,nv
            if (x1(i).eq.0) then
                nv0=nv0+1
                xx0(nv0)=i

                else
                    if(x1(i).eq.1) then
                        nv1=nv1+1
                        xx1(nv1)=i
                    endif
                endif
11      continue
        if (nv0.ne.0)then
            write(res,103)
103      format("numero des variables fixees a 0: ")
            write(res,104)(xx0(i),i=1,nv0)
104      format(15i4)
        endif
        if (nv1.ne.0)then
            write(res,105)
105      format("numero des variables fixees a 1: ")
            write(res,104)(xx1(i),i=1,nv1)
        endif
    endif
```

c probleme resolu

```
    if (nva.eq.0) then
        v=0
        do 12 i=1,nv
            v=v+ (c(i)*x1(i))
12      continue
        write(res,106) v
106      format("valeur optimale du probleme: ", i7)

        j=0
14      continue
        j=j+1
        v=0
        do 13 i=1,nv
            v=v + (a(j,i)*x1(i))
13      continue
        if (v.gt.b(j))then
            write(res,107)
107      format("solution non realisable")
        else
            if (j.lt.nc)go to 14
            write(res,108)
```

```
108                                format("solution realisable")
                                endif

                                endif

                                endif
                                endif

90  continue
    return
end

c*****
    subroutine lecdon

c lecture des donnees du probleme de multiknapsack
c A, B, C, NV, NC

    implicit integer (a-z)

c definition des constantes
    parameter(don=10)
    parameter(nvmax=199, ncmax=101)
    parameter(res=11)

c definition des variables
    common/donnees/nv,nc,a(ncmax,nvmax),b(ncmax),c(nvmax)
    common/saisie/min

    character*8 titre
    dimension bb(ncmax)

    write(res,*)"probleme test: "
    read(*,101)titre
    write(res,101)titre
101 format(a8)
c choix du sous probleme

    read(don,*) nbp, nc

    noselect=1
    if (nbp.gt.1) then
30      write(res,10)nbp
10      format('selectionner un numero parmi les ',i2," problemes")
        read(*,*)noselect
        write(res,*)noselect
    endif

c lecture de la valeur du minorant

    write(res,*)"valeur du minorant"
    read(*,*)min
    write(res,*)min

c lecture des donnees a, b, c

    do 32 n=1,noselect
32      read(don,100) nv, (b(i), i=1,nc)

    do 33 n=1,nbp-noselect
33      read(don,100) nvb, (bb(i), i=1,nc)

    do 34 j=1,nv
34      read(don,100,end=105) c(j), (a(i,j), i=1,nc)
```

```
100  format(10i6)
105  continue
      return
      end
c*****
      subroutine control

c met a jour mopt,f0,f1,modif, en fonction des resultats obtenus
c par les differentes taches

      implicit integer(a-z)

c definition des constantes

      parameter(np=4)
      parameter (nvmax=199,ncmax=101)

c definition des variables partagees

      common/donnees/nv,nc,a(ncmax,nvmax),b(ncmax),c(nvmax)
      common/e_glob/f0,f1,modif,mopt
      common/e_proc/fin(np),tx(np,nvmax),minopt(np),nta,nta1
      common/e_var/nva,nva1,x1(nvmax),x2(nvmax)

      logical fin,f0,f1,modif,mopt,minopt,v0,v1

c initialisation des variables de controle

      f0=.false.
      f1=.false.
      modif=.false.
      mopt=.false.

c calcul de mopt

      j=1
10   continue
      j=j+isearch(nv+1-j,x1(j),1,2)-1
      if(j.gt.nv)go to 12
      i1=isearch(nta,tx(1,j),1,1)
      i0=isearch(nta,tx(1,j),1,0)
      if(i1.le.nta.and.i0.le.nta)then
          mopt=.true.
          return
      endif
      if(j.lt.nv)then
          j=j+1
          go to 10
      endif
12   continue

c fin du calcul de mopt

c calcul de f0
      j=0
20   continue
      j=j+1
      if (isearch(nv,tx(j,1),4,0).le.nv)f0=.true.
      if(j.lt.nta.and..not.f0)go to 20

c calcul de f1
      j=0
21   continue
      j=j+1
      if (isearch(nv,tx(j,1),4,1).le.nv)f1=.true.
```

```

        if(j.lt.nta.and..not.f1)go to 21

c calcul de modif

        if(f0.or.f1)modif=.true.
        return
    end

c*****
        function num0_v(ik,j,no_t)

c transforme ik dans[1,nk] en i dans [1,nv]

        implicit integer(a-z)

c definition des constantes

        parameter (nvmax=199,ncmax=101)
        parameter (np=4)

c definition des variables partagees

        common/e_prob/ar(ncmax,nvmax),br(ncmax),cr(nvmax)
        common/e_proc/fin(np),tx(np,nvmax),minopt(np),nta,nta1
        common/e_var/nva,nva1,x1(nvmax),x2(nvmax)
        logical fin,minopt

        i=0
        do 20 n=1,ik
10          continue
            i=i+1
            if(x1(i).lt.2)go to 10
            if(tx(no_t,i).lt.2)go to 10
            if(ar(j,num_r(i)).eq.0)go to 10
20          continue

        num0_v=i

        return
    end

c*****
        function num_c(ir)

c donne l'indice correspondant a ir dans br (nca<nc), dans le tc (nc)

        implicit integer(a-z)

c definition des constantes

        parameter (ncmax=101,nvmax=199)

c definition des variables partagees

        common/donnees/nv,nc,a(ncmax,nvmax),b(ncmax),c(nvmax)
        common/e_cont/tc(ncmax),nca,nca1,tcr(ncmax)

        is=0
        do 20 i=1,ir
10          continue
            is=is+1
            if (tc(is).eq.0)go to 10
c          is=is+isearch(nc+1-is,tc(is),1,1)-1
20          continue
            num_c=is
        return

```



```
end

c =====
c
c      function num_v(ir)

c donne l'indice correspondant a ir dans l'intervalle [1,nva],
c dans [1,nv]

      implicit integer(a-z)

c definition des constantes

      parameter (nvmax=199,ncmax=101)

c definition des variables partagees

      common/donnees/nv,nc,a(ncmax,nvmax),b(ncmax),c(nvmax)
      common/e_var/nva,nva1,x1(nvmax),x2(nvmax)

      is=0
      do 1 i=1,ir
          is=is+1
          is=is+isearch(nv+1-is,x1(is),1,2)-1
1      continue
      num_v=is
      return
      end

c =====

      function num_r(is)

c effectue le changement de base entre l'indice is, variant sur
c [1,nv] et l'indice ir, variant sur [1,nva]

      implicit integer(a-z)

c definition des constantes

      parameter (nvmax=199)

c definition des variables partagees

      common/e_var/nva,nva1,x1(nvmax),x2(nvmax)

      ir=is
      do 1 i=1,is
          ir=cvmgt(ir,ir-1,x1(i).eq.2)
1      continue
      num_r=ir
      return
      end

c*****

      function trouve1(i1,u)

c rend le numero de la contrainte libre choisie pour la phase1
c rend 0 si il n'y a plus de contraintes libres
c change l'e de la contrainte selectionnee : libre__> reservee

      implicit integer(a-z)

c definition des constantes
```

```
parameter(np=4)
parameter (nvmax=199,ncmax=101)
parameter(res=11)
```

c definition des variables partagees

```
common/donnees/nv,nc,a(ncmax,nvmax),b(ncmax),c(nvmax)
common/e_proc/fin(np),tx(np,nvmax),minopt(np),nta,nta1
common/e_cont/tc(ncmax),nca,nca1,tcr(ncmax)
common/sync2/nbfini,finsem,tcsem
```

```
      i1=i1+1
      if(nta.gt.1)call lockon(tcsem)
      i1=i1+isearch(nca+1-i1,tcr(i1),1,0)-1
3     if(i1.gt.nca)then
          trouve1=0
      else
          tcr(i1)=1
          trouve1=i1
          write(u,*)"i=",num_c(i1)
      endif

      if(nta.gt.1)call lockoff(tcsem)

      return
end
```

c

```
subroutine majr1
```

c met a jour ar,tar,br,cr en fonction de dtx

```
      implicit integer(a-z)
```

c definition des constantes

```
      parameter (nvmax=199,ncmax=101)
```

c definition des variables partagees

```
common/donnees/nv,nc,a(ncmax,nvmax),b(ncmax),c(nvmax)
common/e_prob/ar(ncmax,nvmax),br(ncmax),cr(nvmax)
common/e_cont/tc(ncmax),nca,nca1,tcr(ncmax)
common/e_var/nva,nva1,x1(nvmax),x2(nvmax)
common/maj_var/dtx(nvmax)
```

```
dimension dtxr(nvmax)
```

c reduire dtx pour l'ajuster avec les donnees du pb reduit de l'iteration
c precedente

```
      do 12 j=1,nv
          dtxr(j)=dtx(j)
12     continue
      do 13 j=nv-1,1,-1
          if(x2(j).ne.2)then
              do 14 k=j,nv-1
                  dtxr(k)=dtxr(k+1)
14             continue
          endif
13     continue
```

c decalage a gauche de ar,cr, vers le haut de br
c modification des valeurs contenues dans br

```

do 10 j=nva,1,-1
  if (dtxr(j).ne.2)then
    nva=nva-1
    do 22 k=j,nva
      cr(k)=cr(k+1)
22      continue
      if(dtxr(j).eq.1)then
        do 20 i=1,nca
          br(i)=br(i)-ar(i,j)
20          continue
        endif
        do 23 k=j,nva
          do 21 i=1,nca
            ar(i,k)=ar(i,k+1)
21          continue
23          continue
        endif
10      continue

    return
  end

```

```

c =====
c

```

subroutine maj

c calcule la nouvelle valeur de x1 a partir des resultats des
c differentes taches

c resume tx _2 dimensions_, dans dtx _1 dimension_

c efface le tableau tx : pret pour la prochaine iteration

implicit integer(a-z)

c definition des constantes

```

parameter(np=4)
parameter (nvmax=199,ncmax=101)

```

c definition des variables partagees

```

common/donnees/nv,nc,a(ncmax,nvmax),b(ncmax),c(nvmax)
common/e_proc/fin(np),tx(np,nvmax),minopt(np),nta,nta1
common/e_var/nva,nva1,x1(nvmax),x2(nvmax)
common/maj_var/dtx(nvmax)

```

c initialiser dtx

```

do 15 i=1,nv
  dtx(i)=2
15 continue
do 11 j=1,nv
  i1=isearch(nta,tx(1,j),1,1)
  if(i1.le.nta)then
    x1(j)=1
    dtx(j)=1
  else
    i0=isearch(nta,tx(1,j),1,0)
    if(i0.le.nta)then
      x1(j)=0
      dtx(j)=0
    endif
  endif
11 continue

```

c effacer tx

```

do 12 i=1,nta
    do 13 j=1,nv
        tx(i,j)=2
13    continue
12    continue

    return
end
c =====

subroutine nouveau

c prepare le tableau tcr pour l'iteration suivante

    implicit integer(a-z)

c definition des constantes

    parameter (nvmax=199,ncmax=101)

c definition des variables partagees

    common/donnees/nv,nc,a(ncmax,nvmax),b(ncmax),c(nvmax)
    common/e_var/nva,nva1,x1(nvmax),x2(nvmax)
    common/e_cont/tc(ncmax),nca,nca1,tcr(ncmax)
    common/maj_var/dtx(nvmax)

    do 1 i=1,nca
        tcr(i)=1
1    continue

    do 10 j=1,nv
        if(dtx(j).ne.2)then
            do 5 i=1,nca
                if(tcr(i).eq.1)then
                    if(a(num_c(i),j).ne.0)then
                        tcr(i)=0
                    endif
                endif
            endif
5            continue
        endif
10    continue

    return
end
c =====
c

function cond(c1,c2)

c c1 = numero de la contrainte a eliminer
c c2 = numero de la derniere contrainte selectionnee par cond

c rend le numero de la contrainte elue ou bien 0 si toutes
c les contraintes actives ont deja servi

    implicit integer(a-z)

c definition des constantes

    parameter(np=4)
    parameter (nvmax=199,ncmax=101)

c definition des variables partagees

    common/donnees/nv,nc,a(ncmax,nvmax),b(ncmax),c(nvmax)
    common/e_proc/fin(np),tx(np,nvmax),minopt(np),nta,nta1

```

```

common/e_cont/tc(ncmax),nca,nca1,tc(ncmax)
common/sync2/nbfini,finsem,tcsem

c2=c2+1
if(nta.gt.1)call lockon(tcsem)
20   continue
      if(c2.eq.c1)c2=c2+1
      if (c2.gt.nc)then
          cond=0
      else
          if (tc(c2).ne.0)then
              cond=c2
          else
              c2=c2+1
              go to 20
          endif
      endif
      endif
      if(nta.gt.1)call lockoff(tcsem)

      return
      end
c*****

      function trouve2(i1)

c rend le numero de la contrainte libre choisie pour la phase2
c rend 0 si il n'y a plus de contraintes libres
c change l'ie de la contrainte selectionnee : libre__> reservee

      implicit integer(a-z)

c definition des constantes

      parameter(np=4)
      parameter (nvmax=199,ncmax=101)

c definition des variables partagees

      common/donnees/nv,nc,a(ncmax,nvmax),b(ncmax),c(nvmax)
      common/e_proc/fin(np),tx(np,nvmax),minopt(np),nta,nta1
      common/e_cont/tc(ncmax),nca,nca1,tc(ncmax)
      common/sync2/nbfini,finsem,tcsem

      if(nta.gt.1)call lockon(tcsem)
c      i1=i1+isearch(nc+1-i1,tc(i1),1,1)-1

20   continue
      i1=i1+1
      if(i1.gt.nc)then
          trouve2=0
      else
          if (tc(i1).eq.1)then
              tc(i1)=2
              trouve2=i1
          else
              go to 20
          endif
      endif
      if(nta.gt.1)call lockoff(tcsem)

      return
      end
c*****

      logical function elimk(i,j,u)

c applique un test sur la contrainte i, en utilisant la contrainte j

```

```
c enregistre le resultat du test dans la variable succes

      implicit integer(a-z)

c definition des constantes

      parameter (nvmax=199,ncmax=101)

c definition des variables partagees

      common/e_var/nva,nva1,x1(nvmax),x2(nvmax)
      common/donnees/nv,nc,a(ncmax,nvmax),b(ncmax),c(nvmax)
      dimension ai(nvmax),aj(nvmax)
      logical test

c initialiser les variables definissant le knapsack :
c max ai*x, s.c. aj*x<b ou aj*x=b
      do 10 k=1,nv
         ai(k)=a(i,k)
         aj(k)=a(j,k)
10      continue
      bj=b(j)
      bi=b(i)
      lv=nv
      do 11 k=nv,1,-1
         if(ai(k).eq.0.or.aj(k).eq.0.or.x1(k).lt.2)then
            if(ai(k).eq.0.and.aj(k).ne.0)then
               elimk=.false.
               return
            endif
            if(aj(k).eq.0.and.ai(k).ne.0)bi=bi-ai(k)
            lv=lv-1
            do 12 l=k,lv
               ai(l)=ai(l+1)
               aj(l)=aj(l+1)
12          continue
            endif
11      continue
      c      write(u,*)(ai(k),k=1,lv),"<=",bi
      c      write(u,*)(aj(k),k=1,lv),"<=",bj
      c calculer la valeur du knapsack en deduire si i est redondante
      so=solve(ai,aj,bj,lv)
      c      write(u,*)"so=",so
      if(so.lt.b(i))then
         test=.true.
      else
         test=.false.
      endif
      elimk=test
      return
      end

c*****
      subroutine majr2

c met a jour ar,tar,br,cr en fonction de dtx

      implicit integer(a-z)

c definition des constantes

      parameter (nvmax=199,ncmax=101)

c definition des variables partagees

      common/donnees/nv,nc,a(ncmax,nvmax),b(ncmax),c(nvmax)
```

```
common/e_prob/ar(ncmax,nvmax),br(ncmax),cr(nvmax)
common/e_cont/tc(ncmax),nca,nca1,tcr(ncmax)
common/e_var/nva,nva1,x1(nvmax),x2(nvmax)
```

```
do 24 i=1,nc
  do 241 j=1,nv
    ar(i,j)=a(i,j)
241  continue
24  continue

  do 22 i=1,nc
    br(i)=b(i)
22  continue

c eliminer les variables fixees en phase1
do 9 i=1,nv
  if(x1(i).lt.2)then
    do 23 k=i,nv
      do 231 l=1,nc
        ar(l,k)=ar(l,k+1)
231      continue
23      continue
    endif
9    continue

c eliminer les contraintes redondantes de ar
do 10 j=1,nc
  if(tc(j).eq.0)then
    do 21 k=j,nc
      br(k)=br(k+1)
      do 211 i=1,nva
        ar(k,i)=ar(k+1,i)
211      continue
21      continue
    endif
10  continue
  return
end
```

```
function solve(c,a,b,n)
```

```
c contient la phase 1 de la subroutine FPK79 (Plateau) :
c calcule la partie entiere de la valeur optimale d'un probleme
c de knapsack sur [0,1].
c algorithme NKR de complexite lineaire pour n>10
c algorithme CKR pour n<=10.
```

```
implicit integer(a-z)
parameter(nvmax=199)
dimension c(n),a(n)
dimension ip(nvmax),x(nvmax)
real val,da(nvmax)
```

```
c initialiser
```

```
ic=0
s=0
iseuil=10
k=0
do 2 i=1,n
  ip(i)=i
2  continue
do 10 i=1,n
  x(i)=c(i)
  da(i)=real(c(i))/real(a(i))
10  continue
```

```

      ib1=1
      ic1=n
12  continue
      ib=ib1
      ih=ic1

      if (ih-ib.lt.iseuil)then
c  algorithme CKR:
c  tri des scalaires da(k)=c(k)/a(k)(tri par insertion)

      do 23 j1=ib+1,ih
          j2=j1-1
91      continue
          if(j2.ge.ib)then
              if(da(j2).lt.da(j2+1))then
                  j3=j2+1
                  ipv=ip(j2)
                  val=da(j2)
                  ival=a(j2)
                  ip(j2)=ip(j3)
                  a(j2)=a(j3)
                  da(j2)=da(j3)
                  a(j3)=ival
                  ip(j3)=ipv
                  da(j3)=val
                  j2=j2-1
                  go to 91
              endif
          endif
23      continue
c  (da(k),k=1,n)=liste triee par ordre decroissant des valeurs de da(k)

      do 151 i=1,n
          k13=ip(i)
          c(i)=x(k13)
151      continue
c  (c(i),i=1,n)=liste triee par ordre decroissant des valeurs de da(i)

      s=ib-1
      if(s.ne.0)then
          do 303 i=1,s
              ic=ic+c(i)
303      continue
          endif
c  ic contient la somme des couts deja traites par l'algorithme NKR

      i=ib
304      continue
          j=i
          k=k+a(i)
          ic=ic+c(i)
          i=i+1
          if(i.le.ih.and.k.it.b)go to 304
c  j contient l'indice du multiplicateur optimal

      ve=b-k
      ic1=j
      if(ve.ne.0)then
          ib=j
          r=a(ib)
          ve=ve+a(ib)
          ic=ic-c(ib)
      endif
c  ic contient la somme des couts des variables fixees a 1
c  fin de l'algorithme CKR
```


else

c algorithme NKR:

c partition de $J=\{1, \dots, n\}$ en 2 ensembles U et L:

c soit $R = \{da(k)=c(k)/a(k), k=1, n\}$

c $U(J, R, k) = \{j, da(j) \geq da(k)\}$

c $L(J, R, k) = J - \{U(J, R, k) \cup \{k\}\}$

```

        j1=ib
        j4=(ih+ib)/2
        j2=j4
        if(da(j1).gt.da(j2))then
            j1=j4
            j2=ib
        endif
        j3=ih
        if(da(j3).lt.da(j2))then
            j2=ih
            if(da(j1).ge.da(j2))j2=j1
        endif
        val=da(j2)
        ival=a(j2)
        ipv=ip(j2)
        da(j2)=da(ih)
        a(j2)=a(ih)
        ip(j2)=ip(ih)
6      continue
        if(ib.lt.ih.and.da(ib).ge.val)then
            k=k+a(ib)
            ib=ib+1
            go to 6
        endif
        if(ib.lt.ih)then
            da(ih)=da(ib)
            a(ih)=a(ib)
            ip(ih)=ip(ib)
4      continue
            ih=ih-1
            if(ib.lt.ih.and.da(ih).le.val)go to 4
        endif
        if(ib.lt.ih)then
            da(ib)=da(ih)
            a(ib)=a(ih)
            ip(ib)=ip(ih)
            k=k+a(ih)
            ib=ib+1
        endif
        if (ib.lt.ih) go to 6

        da(ib)=val
        a(ib)=ival
        k=k+ival
        ip(ib)=ipv

        if(k.lt.b)then
            ib1=ib+1
            s=k
            go to 12
        else
            k=k-a(ib)
        endif
        if(k.gt.b) then
            k=s
            ic1=ib-1
            go to 12
        endif
    endif
```

c ib est l'indice du multiplicateur optimal obtenu par l'algo NKR

```
      do 152 i=1,n
          k13=ip(i)
          c(i)=x(k13)
152      continue
c (c(i),i=1,n)=liste ordonnee par da(i) par rapport a la valeur da(ib)
c si i<ib alors da(i)>=da(ib)

          ic1=ib-1
          if(ic1.ne.0)then
              do 99 i=1,ic1
                  ic=ic+c(i)
99          continue
          endif
c ic contient la somme des couts des variables fixees a 1

          ve=b-k
          if(ve.eq.a(ib))then
              ic1=ib
              ic=ic+c(ib)
              ve=0
          else
              r=a(ib)
          endif
      endif

c la partie entiere de la valeur en continu du knapsack
c est memorisee par solve
      solve=ic
      if(ve.ne.0)solve=(ve*c(ib)/r)+ic

      return
end
```

4. PROBLEMES TESTS

Les expériences numériques ont été menées sur cinquante problèmes tests de la littérature. Tous possèdent les caractéristiques suivantes :

- (i) l'hypothèse (H) est vérifiée
- (ii) la matrice A est non négative
- (iii) la matrice A est dense : $\rho > 67$ (1)

La liste de ces problèmes se décompose comme suit :

- Petersen : 7 P
- Hansen, Plateau : 2 HP (2)

- Weingartner, Ness : 8 W
- Shih : 30 WS (3)

- Senju, Toyoda : 2 ST
- Fleisher : 1 F

Notes

(1) ρ représente la densité de la matrice A ($\rho \in]0, 100]$)

$$\rho = \frac{100}{m \times n} \times \text{nombre total des } a_{ij} \text{ non nuls, } i = 1, 2, \dots, m, j = 1, 2, \dots, n$$

(2) Les 2 problèmes de Hansen et Plateau dérivent des problèmes 6 et 7 de Petersen, après utilisation d'un algorithme de réduction qui fixe à leur valeur optimale un certain nombre de variables et élimine les contraintes devenues inactives à cause de ces fixations

(3) Tous les problèmes sont réels sauf ceux de Wei Shih. Pour ces derniers, les a_{ij} sont générés de manière aléatoire à partir d'une loi de distribution uniforme discrète sur $[0,99]$, tandis que, les c_j sont distribués entre 1 et 999. Le choix des b_i est destiné à faire varier dans un large éventail le degré de relâchement des contraintes.

(4) Les matrices sont données ligne par ligne.

PETERSEN 1

Nombre de contraintes : 10

Nombre de variables : 6

Max {cx | Ax ≤ b ; x binaire} = 3800

c =

100	600	1200	2400	500	2000
-----	-----	------	------	-----	------

b =

80	96	20	36	44	48	10	18	22	24
----	----	----	----	----	----	----	----	----	----

A =

8	12	13	64	22	41
---	----	----	----	----	----

8	12	13	75	22	41
---	----	----	----	----	----

3	6	4	18	6	4
---	---	---	----	---	---

5	10	8	32	6	12
---	----	---	----	---	----

5	13	8	42	6	20
---	----	---	----	---	----

5	13	8	48	6	20
---	----	---	----	---	----

0	0	0	0	8	0
---	---	---	---	---	---

3	0	4	0	8	0
---	---	---	---	---	---

3	2	4	0	8	4
---	---	---	---	---	---

3	2	4	8	8	4
---	---	---	---	---	---

x* =

0	1	1	0	0	1
---	---	---	---	---	---

PETERSEN 2

Nombre de contraintes : 10

Nombre de variables : 10

Max {cx | Ax ≤ b ; x binaire} = 87061

c =

6001	3105	18000	38500	186	1987	8820	42000	4025	3270
------	------	-------	-------	-----	------	------	-------	------	------

b =

450	540	200	360	440	480	200	360	440	480
-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----

A =

20	5	100	200	2	4	60	150	80	40
20	7	130	280	2	8	110	210	100	40
60	3	50	100	4	2	20	40	6	12
60	8	70	200	4	6	40	70	16	20
60	13	70	250	4	10	60	90	20	24
60	13	70	280	4	10	70	105	22	28
5	2	20	100	2	5	10	60	0	0
45	14	80	180	6	10	40	100	20	0
55	14	80	200	6	10	50	140	30	40
65	14	80	220	6	10	50	180	30	50

x* =

0	1	0	1	1	0	0	1	0	1
---	---	---	---	---	---	---	---	---	---

PETERSEN 3

Nombre de contraintes : 10

Nombre de variables : 15

Max {cx | Ax ≤ b ; x binaire} = 4015

c =

100	220	90	400	300	400	205	120	160	580
400	140	100	1300	650					

b =

550	700	130	240	280	310	110	205	260	275
-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----

A =

8	24	13	80	70	80	45	15	28	90
130	32	20	120	40					
8	44	13	100	100	90	75	25	28	120
130	32	40	160	40					
3	6	4	20	20	30	8	3	12	14
40	6	3	20	5					
5	9	6	40	30	40	16	5	18	24
60	16	11	30	25					
5	11	7	50	40	40	19	7	18	29
70	21	17	30	25					
5	11	7	55	40	40	21	9	18	29
70	21	17	35	25					
0	0	1	10	4	10	0	6	0	6
32	3	0	70	10					
3	4	5	20	14	20	6	12	10	18
42	9	12	100	20					
3	6	9	30	29	20	12	12	10	30
42	18	18	110	20					
3	8	9	35	29	20	16	15	10	30
42	20	18	120	20					

x* =

1	1	0	1	0	1	1	0	1	1
0	0	0	1	1					

PETERSEN 4

Nombre de contraintes : 10

Nombre de variables : 20

Max {cx | Ax ≤ b ; x binaire} = 6120

c =

100	220	90	400	300	400	205	120	160	580
400	140	100	1300	650	320	480	80	60	2550

b =

550	700	130	240	280	310	110	205	260	275
-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----

A =

8	24	13	80	70	80	45	15	28	90
130	32	20	120	40	30	20	6	3	180

8	44	13	100	100	90	75	25	28	120
130	32	40	160	40	60	55	10	6	240

3	6	4	20	20	30	8	3	12	14
40	6	3	20	5	0	5	3	0	20

5	9	6	40	30	40	16	5	18	24
60	16	11	30	25	10	13	5	1	80

5	11	7	50	40	40	19	7	18	29
70	21	17	30	25	15	25	5	1	100

5	11	7	55	40	40	21	9	18	29
70	21	17	35	25	20	25	5	2	110

0	0	1	10	4	10	0	6	0	6
32	3	0	70	10	0	0	0	0	0

3	4	5	20	14	20	6	12	10	18
42	9	12	100	20	5	6	4	1	20

3	6	9	30	29	20	12	12	10	30
42	18	18	110	20	15	18	7	2	40

3	8	9	35	29	20	16	15	10	30
42	20	18	120	20	20	22	7	3	50

x* =

1	0	0	0	0	0	0	0	0	1
0	0	0	1	1	1	1	1	1	1

PETERSEN 5

Nombre de contraintes : 10

Nombre de variables : 28

Max {cx | Ax ≤ b ; x binaire} = 12400

c =

100	220	90	400	300	400	205	120	160	580
400	140	100	1300	650	320	480	80	60	2550
3100	1100	950	450	300	220	200	520		

b =

930	1210	272	462	532	572	240	400	470	490
-----	------	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----

A =

8	24	13	80	70	80	45	15	28	90
130	32	20	120	40	30	20	6	3	180
220	50	30	50	12	5	8	18		

8	44	13	100	100	90	75	25	28	120
130	32	40	160	40	60	55	10	6	240
290	80	90	70	27	17	8	28		

3	6	4	20	20	30	8	3	12	14
40	6	3	20	5	0	5	3	0	20
30	40	10	0	5	0	0	10		

5	9	6	40	30	40	16	5	18	24
60	16	11	30	25	10	13	5	1	80
60	50	20	30	10	5	3	20		

5	11	7	50	40	40	19	7	18	29
70	21	17	30	25	15	25	5	1	100
70	55	20	50	15	15	6	20		

5	11	7	55	40	40	21	9	18	29
70	21	17	35	25	20	25	5	2	110
70	55	20	50	20	15	6	20		

0	0	1	10	4	10	0	6	0	6
32	3	0	70	10	0	0	0	0	0
30	10	0	10	10	5	0	10		

3	4	5	20	14	20	6	12	10	18
42	9	12	100	20	5	6	4	1	20
50	30	5	20	20	10	10	20		

3	6	9	30	29	20	12	12	10	30
42	18	18	110	20	15	18	7	2	40
60	50	25	25	25	15	10	28		

3	8	9	35	29	20	16	15	10	30
42	20	18	120	20	20	22	7	3	50
60	55	25	30	25	15	10	28		

x* =

1	1	1	0	0	0	0	0	1	0
0	0	0	1	1	1	1	1	1	1
1	1	1	0	1	1	1	1	0	0

PETERSEN 6

Nombre de contraintes : 5

Nombre de variables : 39

Max {cx | Ax ≤ b ; x binaire} = 10618

c =

560	1125	300	620	2100	431	68	328	47	122
322	196	41	25	425	4260	416	115	82	22
631	132	420	86	42	103	215	81	91	26
49	420	316	72	71	49	108	116	90	

b =

600	500	500	500	600
-----	-----	-----	-----	-----

A =

40	91	10	30	160	20	3	12	3	18
9	25	1	1	10	280	10	8	1	1
49	8	21	6	1	5	10	8	2	1
0	10	42	6	4	8	0	10	1	
16	92	41	16	150	23	4	18	6	0
12	8	2	1	0	200	20	6	2	1
70	9	22	4	1	5	10	6	4	0
4	12	8	4	3	0	10	0	6	
38	39	32	71	80	26	5	40	8	12
30	15	0	1	23	100	0	20	3	0
40	6	8	0	6	4	22	4	6	1
5	14	8	2	8	0	20	0	0	
8	71	30	60	200	18	6	30	4	8
31	6	3	0	18	60	21	4	0	2
32	15	31	2	2	7	8	2	8	0
2	8	6	7	1	0	0	20	8	
38	52	30	42	170	9	7	20	0	3
21	4	1	2	14	310	8	4	6	1
18	15	38	10	4	8	6	0	0	3
0	10	6	1	3	0	3	5	4	

x* =

1	1	0	1	0	1	0	1	1	0
1	0	1	0	1	1	1	1	1	1
0	0	1	0	0	1	1	1	1	0
1	1	0	1	1	1	1	1	1	

PETERSEN 7

Nombre de contraintes : 5

Nombre de variables : 50

Max {cx | Ax ≤ b ; x binaire} = 16537

c =

560	1125	300	620	2100	431	68	328	47	122
322	196	41	25	425	4260	416	115	82	22
631	132	420	86	42	103	215	81	91	26
49	420	316	72	71	49	108	116	90	738
1811	430	3060	215	58	296	620	418	47	81

b =

800	650	550	550	650
-----	-----	-----	-----	-----

A =

40	91	10	30	160	20	3	12	3	18
9	25	1	1	10	280	10	8	1	1
49	8	21	6	1	5	10	8	2	1
0	10	42	6	4	8	0	10	1	40
86	11	120	8	3	32	28	13	2	4
16	92	41	16	150	23	4	18	6	0
12	8	2	1	0	200	20	6	2	1
70	9	22	4	1	5	10	6	4	0
4	12	8	4	3	0	10	0	6	28
93	9	30	22	0	36	45	13	2	2
38	39	32	71	80	26	5	40	8	12
30	15	0	1	23	100	0	20	3	0
40	6	8	0	6	4	22	4	6	1
5	14	8	2	8	0	20	0	0	6
12	6	80	13	6	22	14	0	1	2
8	71	30	60	200	18	6	30	4	8
31	6	3	0	18	60	21	4	0	2
32	15	31	2	2	7	8	2	8	0
2	8	6	7	1	0	0	20	8	14
20	2	40	6	1	14	20	12	0	1
38	52	30	42	170	9	7	20	0	3
21	4	1	2	14	310	8	4	6	1
18	15	38	10	4	8	6	0	0	3
0	10	6	1	3	0	3	5	4	0
30	12	16	18	3	16	22	30	4	0

x* =

0	0	0	1	0	1	0	1	1	0
1	1	1	0	1	1	1	0	1	1
0	0	1	0	1	1	1	1	1	0
1	1	0	1	1	1	1	1	1	1
1	1	1	1	0	0	1	1	1	1

HANSEN, PLATEAU 1

Nombre de contraintes : 4

Nombre de variables : 28

Max {cx | Ax ≤ b ; x binaire} = 3418

c =

560	1125	68	328	47	122	196	41	25	115
82	22	631	132	420	86	42	103	81	26
49	316	72	71	49	108	116	90		

b =

219	203	208	180
-----	-----	-----	-----

A =

40	91	3	12	3	18	25	1	1	8
1	1	49	8	21	6	1	5	8	1
0	42	6	4	8	0	10	1		
16	92	4	18	6	0	8	2	1	6
2	1	70	9	22	4	1	5	6	0
4	8	4	3	0	10	0	6		
38	39	5	40	8	12	15	0	1	20
3	0	40	6	8	0	6	4	4	1
5	8	2	8	0	20	0	0		
38	52	7	20	0	3	4	1	2	4
6	1	18	15	38	10	4	8	0	3
0	6	1	3	0	3	5	4		

x* =

1	1	0	1	1	0	0	1	0	1
1	1	0	0	1	0	1	0	1	0
1	0	1	1	1	1	1	1		

HANSEN, PLATEAU 2

Nombre de contraintes : 4

Nombre de variables : 35

Max {cx | Ax ≤ b ; x binaire} = 3186

c =

560	1125	620	68	328	47	122	196	41	25
115	82	22	631	132	420	86	42	103	215
81	91	26	49	316	72	71	49	108	116
90	215	58	47	81					

b =

163	165	239	168
-----	-----	-----	-----

A =

40	91	30	3	12	3	18	25	1	1
8	1	1	49	8	21	6	1	5	10
8	2	1	0	42	6	4	8	0	10
1	8	3	2	4					
16	92	16	4	18	6	0	8	2	1
6	2	1	70	9	22	4	1	5	10
6	4	0	4	8	4	3	0	10	0
6	22	0	2	2					
38	39	71	5	40	8	12	15	0	1
20	3	0	40	6	8	0	6	4	22
4	6	1	5	8	2	8	0	20	0
0	13	6	1	2					
38	52	42	7	20	0	3	4	1	2
4	6	1	18	15	38	10	4	8	6
0	0	3	0	6	1	3	0	3	5
4	18	3	4	0					

x* =

0	0	1	0	1	1	0	1	1	0
0	1	1	0	0	1	0	1	1	1
1	1	0	1	0	1	1	1	1	1
1	1	0	1	1					

WEINGARTNER 1 à 6

Nombre de contraintes : 2

Nombre de variables : 28

Max {cx | Ax ≤ b ; x binaire} = v(B)

c =

1898	440	22507	270	14148	3100	4650	30800	615	4975
1160	4225	510	11880	479	440	490	330	110	560
24355	2865	11748	4550	750	3720	1950	10500		

A =

45	0	85	150	65	95	30	0	170	0
40	25	20	0	0	25	0	0	25	0
165	0	85	0	0	0	0	100		
30	20	125	5	80	25	35	73	12	15
15	40	5	10	10	12	10	9	0	20
60	40	50	36	49	40	19	150		

Problème	b	v(B)
1	600 600	141278
2	500 500	130883
3	300 300	95677
4	300 600	119337
5	600 300	98796
6	562 497	130623

WEINGARTNER 7 et 8

Nombre de contraintes : 2

Nombre de variables : 105

Max {cx | Ax ≤ b ; x binaire} = v(B)

c =

41850	38261	23800	21697	7074	5587	5560	5500	3450	2391
761	460	367	24785	47910	30250	107200	4235	9835	9262
15000	6399	6155	10874	37100	27040	4117	32240	1600	4500
70610	6570	15290	23840	16500	7010	16020	8000	31026	2568
2365	4350	1972	4975	29400	7471	2700	3840	22400	3575
13500	1125	11950	12753	10568	15600	20652	13150	2900	1790
4970	5770	8180	2450	7140	12470	6010	16000	11100	11093
4685	2590	11500	5820	2842	5000	3300	2800	5420	900
13300	8450	5300	750	1435	2100	7215	2605	2422	5500
8550	2700	540	2550	2450	725	445	700	1720	2675
220	300	405	150	70					

A =

75	40	365	95	25	17	125	20	22	84
75	50	15	0	0	12	0	10	0	50
0	0	10	0	0	50	60	150	0	0
75	0	102	0	0	40	60	0	165	0
0	0	45	0	0	0	25	0	150	0
0	0	158	0	85	95	0	89	20	0
0	0	0	0	0	80	0	110	0	15
0	60	5	135	0	0	25	0	300	35
100	0	0	25	0	0	225	25	0	0
0	0	0	0	0	5	0	60	0	100
0	0	0	0	0					
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	5	10	10	50	2	5	5
10	5	6	11	41	30	5	40	2	6
100	10	25	39	30	13	30	15	60	5
5	10	5	15	91	24	10	15	90	15
60	5	55	60	50	75	100	65	15	10
30	35	50	15	45	80	40	110	80	80
36	20	90	50	25	50	35	30	60	10
150	110	70	10	20	30	104	40	40	94
150	50	10	50	50	16	10	20	50	90
10	15	39	20	20					

Problème	b	v(B)
7	3000 3000	1095445
8	500 500	624319

WEI SHIH 1 à 30

Nombre de contraintes : 5

Max {cx | Ax ≤ b ; x binaire} = v(B)

c =

360	83	59	130	431	67	230	52	93	125
670	892	600	38	48	147	78	256	63	17
120	164	432	35	92	110	22	42	50	323
514	28	87	73	78	15	26	78	210	36
85	189	274	43	33	10	19	389	276	312
94	68	73	192	41	163	16	40	195	138
73	152	400	26	14	170	205	57	369	435
123	25	94	88	90	146	55	29	82	74
100	72	31	29	316	244	70	82	90	52

A ₁ =	7	0	30	22	80	94	11	81	70	64
	59	18	0	36	3	8	15	42	9	0
	42	47	52	32	26	48	55	6	29	84
	2	4	18	56	7	29	93	44	71	3
	86	66	31	65	0	79	20	65	52	13
	48	14	5	72	14	39	46	27	11	91
	15	25	0	94	53	48	27	99	6	17
	69	43	0	57	7	21	78	10	37	26
	20	8	4	43	17	25	36	60	84	40

A ₂ =	8	66	98	50	0	30	0	88	15	37
	26	72	61	57	17	27	83	3	9	66
	97	42	2	44	71	11	25	74	90	20
	0	38	33	14	9	23	12	58	6	14
	78	0	12	99	84	31	16	7	33	20
	5	18	96	63	31	0	70	4	66	9
	15	25	2	0	48	1	40	31	82	79
	56	34	3	19	52	36	95	6	35	34
	74	26	10	85	63	31	22	9	92	18

A ₃ =	3	74	88	50	55	19	0	6	30	62
	17	81	25	46	67	28	36	8	1	52
	19	37	27	62	39	84	16	14	21	5
	60	82	72	89	16	5	29	7	80	97
	41	46	15	92	51	76	57	90	10	37
	25	93	5	39	0	97	6	96	2	81
	69	4	32	78	65	83	62	89	45	53
	52	76	72	23	89	48	41	1	27	19
	3	32	82	20	2	51	18	42	4	26

$A_4 =$	21	40	0	6	82	91	43	30	62	91
	10	41	12	4	80	77	98	50	78	35
	7	1	96	67	85	4	23	38	2	57
	4	53	0	33	2	25	14	97	87	42
	15	65	19	83	67	70	80	39	9	5
	41	31	36	15	30	87	28	13	40	0
	51	79	75	43	91	60	24	18	85	83
	3	85	2	5	51	63	52	85	17	62
	7	86	48	2	1	15	74	80	57	16

$A_5 =$	94	86	80	92	31	17	65	51	46	66
	44	3	26	0	39	20	11	6	55	70
	11	75	82	35	47	99	5	14	23	38
	94	66	64	27	77	50	28	25	61	10
	30	15	12	24	90	25	39	47	98	83
	56	36	6	66	89	45	38	1	18	88
	19	39	20	1	7	34	68	32	31	58
	41	99	92	67	33	26	25	68	37	6
	11	17	48	79	63	77	17	29	18	60

Problème	n	b					v(B)
1	30	400	500	500	600	600	4554
2	30	370	650	460	980	870	4536
3	30	480	800	500	300	620	4115
4	30	540	270	500	500	750	4561
5	30	540	240	480	600	790	4514
6	40	480	760	800	1180	940	5557
7	40	480	600	700	1200	1200	5567
8	40	480	760	800	1185	1200	5605
9	40	750	870	360	800	940	5246
10	50	850	1400	1500	450	1100	6339
11	50	880	1340	1360	300	1000	5643
12	50	850	1400	1500	440	1100	6339
13	50	850	1400	1500	400	1100	6159
14	60	1024	1700	1850	510	1310	6954
15	60	1130	420	1380	1000	1630	7486
16	60	1200	1300	630	1100	1400	7289
17	60	2090	2200	1190	2460	2320	8633
18	70	970	1310	1730	2220	2580	9580
19	70	1200	1920	2330	620	1460	7698
20	70	1320	700	1730	1954	1810	9450
21	70	1320	600	1730	1954	1810	9074
22	80	1347	2180	2683	838	1788	8947
23	80	1360	2200	2700	700	1700	8344
24	80	1100	1500	2000	2500	3000	10220
25	80	1500	800	2000	2200	2100	9939
26	90	1600	2500	3000	850	2000	9584
27	90	1600	2500	3000	900	2000	9819
28	90	1500	2500	3000	820	2000	9492
29	90	1600	2500	3000	800	2000	9410
30	90	2100	1100	3300	3700	3600	11191

SENJU, TOYODA 1 et 2

Nombre de contraintes : 30

Nombre de variables : 60

Max {cx | Ax ≤ b ; x binaire} = v(B)

c =

2	77	6	67	930	3	6	270	33	13
110	21	56	974	47	734	238	75	200	51
47	63	7	6	468	72	95	82	91	83
27	13	6	76	55	72	300	6	65	39
63	61	52	85	29	640	558	53	47	25
3	6	568	6	2	780	69	31	774	22

A ₁ =	47	774	76	56	59	22	42	1	21	760
	818	62	42	36	785	29	662	49	608	116
	834	57	42	39	994	690	27	524	23	96
	667	490	805	46	19	26	97	71	699	465
	53	26	123	20	25	450	22	979	75	96
	27	41	21	81	15	76	97	646	898	37

A ₂ =	73	67	27	99	35	794	53	378	234	32
	792	97	64	19	435	712	837	22	504	332
	13	65	86	29	894	266	75	16	86	91
	67	445	118	73	97	370	88	85	165	268
	758	21	255	81	5	774	39	377	18	370
	96	61	57	23	13	164	908	834	960	87

A ₃ =	36	42	56	96	438	49	57	16	978	9
	644	584	82	550	283	340	596	788	33	350
	55	59	348	66	468	983	6	33	42	96
	464	175	33	97	15	22	9	554	358	587
	71	23	931	931	94	798	73	873	22	39
	71	864	59	82	16	444	37	475	65	5

A ₄ =	47	114	26	668	82	43	55	55	56	27
	716	7	77	26	950	320	350	95	714	789
	430	97	590	32	69	264	19	51	97	33
	571	388	602	140	15	85	42	66	778	936
	61	23	449	973	828	33	53	297	75	3
	54	27	918	11	620	13	28	80	79	3

A ₅ =	61	720	7	31	22	82	688	19	82	654
	809	99	81	97	830	826	775	72	9	719
	740	850	72	30	82	112	66	638	150	13
	586	590	519	2	320	13	964	754	70	241
	72	12	996	868	36	91	79	221	49	690
	23	18	748	408	688	97	85	777	294	17

$A_6 =$	698	53	290	3	62	37	704	810	42	17
	983	11	45	56	234	389	712	664	59	15
	22	91	57	784	75	719	294	978	75	86
	105	227	760	2	190	3	71	32	210	678
	41	93	47	581	37	977	62	503	32	85
	31	36	30	328	74	31	56	891	62	97
$A_7 =$	71	37	978	93	9	23	47	71	744	9
	619	32	214	31	796	103	593	16	468	700
	884	67	36	3	93	71	734	504	81	53
	509	114	293	31	75	59	99	11	67	306
	96	218	845	303	3	319	86	724	22	838
	82	5	330	58	55	66	53	916	89	56
$A_8 =$	33	27	13	57	6	87	21	12	15	290
	206	420	32	880	854	417	770	4	12	952
	604	13	96	910	34	460	76	16	140	100
	876	622	559	39	640	59	6	244	232	513
	644	7	813	624	990	274	808	372	2	694
	804	39	5	644	914	484	1	8	43	92
$A_9 =$	16	36	538	210	844	520	33	73	100	284
	650	85	894	2	206	637	324	318	7	566
	46	818	92	65	520	721	90	53	174	43
	320	812	382	16	878	678	29	92	755	827
	27	218	143	12	57	480	154	944	7	730
	12	65	67	39	390	32	39	318	47	86
$A_{10} =$	45	51	59	21	53	43	25	7	42	27
	310	45	72	53	798	304	354	79	45	44
	52	76	45	26	27	968	86	16	62	85
	790	208	390	36	62	83	93	16	574	150
	99	7	920	860	12	404	31	560	37	32
	9	62	7	43	17	77	73	368	66	82
$A_{11} =$	11	51	97	26	83	426	92	39	66	2
	23	93	85	660	85	774	77	77	927	868
	7	554	760	104	48	202	45	75	51	55
	716	752	37	95	267	91	5	956	444	529
	96	99	17	99	62	7	394	580	604	89
	678	476	97	234	1	608	19	69	676	51
$A_{12} =$	410	89	414	81	130	491	6	238	79	43
	5	288	910	204	948	19	644	21	295	11
	6	595	904	67	51	703	430	95	408	89
	11	495	844	13	417	570	9	429	16	939
	430	270	49	72	65	66	338	994	167	76
	47	211	87	39	1	570	85	134	967	12
$A_{13} =$	553	63	35	63	98	402	664	85	458	834
	3	62	508	7	1	72	88	45	496	43
	750	222	96	31	278	184	36	7	210	55
	653	51	35	37	393	2	49	884	418	379
	75	338	51	21	29	95	790	846	720	71
	728	930	95	1	910	5	804	5	284	128

$A_{14} =$	423	6	58	36	37	321	22	26	16	27
	218	530	93	55	89	71	828	75	628	67
	66	622	440	91	73	790	710	59	83	968
	129	632	170	67	613	608	43	71	730	910
	36	92	950	138	23	95	460	62	189	73
	65	943	62	554	46	318	13	540	90	53
$A_{15} =$	967	654	46	69	26	769	82	89	15	87
	46	59	22	840	66	35	684	57	254	230
	21	586	51	19	984	156	23	748	760	65
	339	892	13	13	327	65	35	246	71	178
	83	3	34	624	788	200	980	882	343	550
	708	542	53	72	86	51	700	524	577	948
$A_{16} =$	132	900	72	51	91	150	22	110	154	148
	99	75	21	544	110	11	52	840	201	2
	6	663	22	20	89	10	93	964	924	73
	501	398	3	2	279	5	288	80	91	132
	620	628	57	79	2	874	36	497	846	22
	350	866	57	86	83	178	968	52	399	628
$A_{17} =$	869	26	710	37	81	89	6	82	82	56
	96	66	46	13	934	49	394	72	194	408
	5	541	88	93	36	398	508	89	66	16
	71	466	7	95	464	41	69	130	488	695
	82	39	95	53	37	200	87	56	268	71
	304	855	22	564	47	26	26	370	569	2
$A_{18} =$	494	2	25	61	674	638	61	59	62	690
	630	86	198	24	15	650	75	25	571	338
	268	958	95	898	56	585	99	83	21	600
	462	940	96	464	228	93	72	734	89	287
	174	62	51	73	42	838	82	515	232	91
	25	47	12	56	65	734	70	48	209	71
$A_{19} =$	267	290	31	844	12	570	13	69	65	848
	72	780	27	96	97	17	69	274	616	36
	554	236	47	7	47	134	76	62	824	55
	374	471	478	504	496	754	604	923	330	22
	97	6	2	16	14	958	53	480	482	93
	57	641	72	75	51	96	83	47	403	32
$A_{20} =$	624	7	96	45	97	148	91	3	69	26
	22	45	42	2	75	76	96	67	688	2
	2	224	83	69	41	660	81	89	93	27
	214	458	66	72	384	59	76	538	15	840
	65	63	77	33	92	32	35	832	970	49
	13	8	77	75	51	95	56	63	578	47
$A_{21} =$	33	62	928	292	2	340	278	911	818	770
	464	53	888	55	76	31	389	40	864	36
	35	37	69	95	22	648	334	14	198	42
	73	594	95	32	814	45	45	515	634	254
	42	29	15	83	55	176	35	46	60	296
	262	598	67	644	80	999	3	727	79	374

$A_{22} =$	19	780	400	588	37	86	23	583	518	42
	56	1	108	83	43	720	570	81	674	25
	96	218	6	69	107	534	158	56	5	938
	9	938	274	76	298	9	518	571	47	175
	63	93	49	94	42	26	79	50	718	926
	419	810	23	363	519	339	86	751	7	86
$A_{23} =$	47	75	55	554	3	800	6	13	85	65
	99	45	69	73	864	95	199	924	19	948
	214	3	718	56	278	1	363	86	1	22
	56	114	13	53	56	19	82	88	99	543
	674	704	418	670	554	282	5	67	63	466
	491	49	67	154	956	911	77	635	2	49
$A_{24} =$	53	12	79	481	218	26	624	954	13	580
	130	608	3	37	91	78	743	1	950	45
	41	718	36	30	534	418	452	359	759	88
	29	499	55	974	93	56	108	257	93	171
	13	92	63	714	9	84	890	16	930	967
	748	5	7	6	327	894	33	629	448	21
$A_{25} =$	9	19	7	535	75	3	27	928	21	7
	864	27	73	61	25	75	876	16	92	22
	248	11	86	944	872	996	252	2	800	334
	93	107	254	441	930	744	97	177	498	931
	694	800	9	36	6	539	35	79	130	860
	710	7	630	475	903	552	2	45	97	974
$A_{26} =$	17	36	77	843	328	22	76	368	39	71
	35	850	96	93	87	56	972	96	594	864
	344	76	17	17	576	629	780	640	56	65
	43	196	520	86	92	31	6	593	174	569
	89	718	83	8	790	285	780	62	378	313
	519	2	85	845	931	731	42	365	32	33
$A_{27} =$	65	59	2	671	26	364	854	526	570	630
	33	654	95	41	42	27	584	17	724	59
	42	26	918	6	242	356	75	644	818	168
	964	12	97	178	634	21	3	586	47	382
	804	89	194	21	610	168	79	96	87	266
	482	46	96	969	629	128	924	812	19	2
$A_{28} =$	468	13	9	120	73	7	92	99	93	418
	224	22	7	29	57	33	949	65	92	898
	200	57	12	31	296	185	272	91	77	37
	734	911	27	310	59	33	87	872	73	79
	920	85	59	72	888	49	12	79	538	947
	462	444	828	935	518	894	13	591	22	920
$A_{29} =$	23	93	87	490	32	63	870	393	52	23
	63	634	39	83	12	72	131	69	984	87
	86	99	52	110	183	704	232	674	384	47
	804	99	83	81	174	99	77	708	7	623
	114	1	750	49	284	492	11	61	6	449
	429	52	62	482	826	147	338	911	30	984

$A_{30} =$	35	55	21	264	5	35	92	128	65	27
	9	52	66	51	7	47	670	83	76	7
	79	37	2	46	480	608	990	53	47	19
	35	518	71	59	32	87	96	240	52	310
	86	73	52	31	83	544	16	15	21	774
	224	7	83	680	554	310	96	844	29	61

Problème	b										v(B)
1	6000	6000	6000	6000	6000	6000	6000	6000	6000	6000 4000	7772
	6000	6000	6000	6000	6000	6000	6000	6000	6000	6000 4000	
	6000	6000	6000	6000	6000	6000	6000	6000	6000	6000 4000	
2	10000	10000	10000	10000	10000	10000	10000	10000	10000	10000 7000	8722
	10000	10000	10000	10000	10000	10000	10000	10000	10000	10000 7000	
	10000	10000	10000	10000	10000	10000	10000	10000	10000	10000 7000	

FLEISHER

Nombre de contraintes : 10

Nombre de variables : 20

Max {cx | Ax ≤ b ; x binaire} = 2139

c =

245	177	291	237	114	237	194	211	231	211
97	168	174	134	308	271	131	211	97	282

b =

463	451	623	493	551	647	624	511	595	526
-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----

A =

77	12	57	7	21	20	85	52	72	90
62	71	93	8	79	68	68	44	13	52
21	85	87	82	26	61	36	1	14	19
74	26	85	24	56	63	0	12	1	39
72	58	72	93	3	93	17	54	92	79
12	20	24	30	99	79	15	11	8	89
76	14	86	37	12	48	54	58	32	15
6	54	32	32	71	61	29	92	20	73
11	62	93	56	80	52	93	38	89	33
17	32	35	76	51	31	40	73	42	78
28	85	3	31	93	44	93	73	35	28
11	37	99	73	91	67	7	95	15	97
32	42	54	90	59	98	94	88	59	86
10	0	59	15	76	97	55	87	70	1
77	18	87	61	64	37	41	39	3	18
20	55	50	30	51	92	88	55	60	86
53	83	68	50	86	20	19	58	48	99
57	67	21	36	41	13	34	94	50	50
41	68	47	16	5	9	35	52	88	73
64	96	9	62	79	27	16	24	30	60

x* =

0	1	0	1	0	1	0	1	0	1
---	---	---	---	---	---	---	---	---	---

REFERENCES

REFERENCES

- [1] BALAS E. and ZEMEL E., *An algorithm for Large Zero-One Knapsack Problem*, Operations Research 28 (1980) 1130-1154.
- [2] FAYARD D. and PLATEAU G., *An algorithm for the Solution of the 0-1 Knapsack Problem*, Computing 28 (1982) 269-287.
- [3] FLEISCHER J., Sigmap Newsletter 20 (1976).
- [4] FREVILLE A. and PLATEAU G., *Heuristics and reduction methods for multiple constraints 0-1 linear programming problems*, European Journal of Operational Research 24 (1986) 206-215.
- [5] FREVILLE A. and PLATEAU G., *Hard 0-1 multiknapsack test problems for size reduction methods*, Research Report 72, Université Paris-Nord (1987).
- [6] GAVISH B. and PIRKUL H., *Efficient algorithms for solving multiconstraint zero-one knapsack problems to optimality*, Mathematical Programming 31 (1985) 78-105.
- [7] GLOVER F., *A multiphase dual algorithm for the 0-1 integer programming problem*, Operations Research 13 (1965) 879-919.
- [8] GOPALAKRISHNAN P.S., KANAL L.N. and RAMAKRISHNAN I.V., *Approximate algorithms for the Knapsack problem on Parallel computers*, IBM report RC 12549 (1987) 1-34.
- [9] HAMMER P.L., PADBERG M.W. and PELED U.N., *Constraint pairing in integer programming*, INFOR - Canadian Journal of Operational Research and Information Processing 13 (1975) 68-81.
- [10] KARNIN E.D., *A parallel algorithm for the knapsack problem*, IEEE Trans. On Computers C-33 (5) (1984) 404-408.

- [11] KLEIN P. and MEYER auf der HEIDE F., *A lower time bound for the knapsack problem on random acces machine*, Acta Informatica 19 (1983) 385-395.
- [12] LAVALLEE I. and ROUCAIROL C., *Parallel branch and bound algorithms*, EURO VII Congress, Research Report MASI 112, Université Paris 6 (1985).
- [13] MARTELLO S. and TOTH P., *Algorithm for the solution of the 0-1 single knapsack*, Computing 21 (1978) 81-86.
- [14] MARTELLO S. and TOTH P., *A new algorithm for the 0-1 knapsack problem*, presented at ORSA-TIMS Meeting, Miami Beach (1986).
- [15] PETERSEN C.C., *Computational experience with variants of the Balas algorithm applied to the selection of R and D projects*, Management Science 13 (9) (1967) 736-750.
- [16] PLATEAU G., *Reduction de la taille des problèmes linéaires en variables 0-1*, Research Report 71, UST Lille 1 (1976).
- [17] PLATEAU G. and ELKIHIL M., *A hybrid method for the 0-1 knapsack problem*, Methods of Operations Research 49 (1985) 277-293.
- [18] PLATEAU G., ROUCAIROL C. and VALABREGUE I., *Algorithm PR² for the parallel size reduction of the 0-1 multiknapsack problem*, Research Report INRIA, Rocquencourt (to appear).
- [19] ROUCAIROL C., *A parallel branch and bound algorithm for the quadratic assignment problem*, Discrete Applied Mathematics 18 (1987) 211-225.
- [20] ROUCAIROL C., *Du séquentiel au parallèle : la recherche arborescente et son application à la programmation quadratique en variables 0-1*, Thèse d'Etat, Université Paris 6 (1987).
- [21] SENJU S. and TOYODA Y., *An approach to linear programming with 0-1 variables*, Management Science 15 (4) (1968) 196-207.

- [22] SHIH W., *A branch and bound method for the multiconstraint 0-1 knapsack problem*, Journal of the Operational Research Society 30 (4) (1979).
- [23] VALABREGUE I., *Multiknapsack en parallèle : phase de réduction*, Mémoire d'Ingénieur IIE-CNAM, Evry (1987).
- [24] WEINGARTNER H.M. and NESS D.N., *Methods for the solution of the multidimensional 0-1 knapsack problem*, Operations Research 15 (1) (1967) 83-103.
- [25] YAO A.C., *On parallel computation for the knapsack problem*, JACM 29 (3) (1982) 898-903.

